2025 Abel Ödülü

Cebirsel Analizin Kurucularından Masaki Kashiwara'nın

İlay Çelik Sezer [*TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

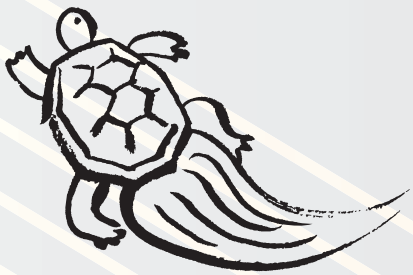
Matematik alanındaki önemli gelişmeler, bazen matematiğin farklı alanları arasında bağlantılar kurulması ya da bir alandaki yöntem ve yaklaşımların başka bir alana uygulanması sayesinde gerçekleşebiliyor. Aslında bilim tarihi bu tür etkileşimlerin matematiğin gelişiminde nasıl dönüştürücü bir rol oynadığını gösteren örneklerle dolu. Matematiğin en prestijli ödüllerinden biri olan Abel Ödülü'nün bu yılki sahibi Masaki Kashiwara'nın matematik alanına yapmış olduğu katkılar da bu örnekler arasında sayılabilir. Kashiwara "cebirsel analize ve temsil kuramına yaptığı katkılar, özellikle de D-modülleri kuramını geliştirmesi ve kristal bazlarını keşfetmesi" nedeniyle Norveç Bilim ve Edebiyat Akademisi tarafından 2025 Abel Ödülü'ne layık görüldü.

Shaumiaa Vector / iStock

Masaki Kashiwara

Matematiğin birbirinden uzak görünen dalları arasında köprüler kurmaktaki maharetiyle tanınan Kashiwara, diferansiyel denklemler gibi zor problemleri çözmek için cebirsel yaklaşımlar kullandı ve matematikte simetri gibi soyut yapıları açıklamakta kullanılan temsil kuramının kapsamını büyük ölçüde genişletti. Abel Komitesi Başkanı Helge Holden'in tabiriyle o, "geometriye, cebire ve analize ait araçları birleştirerek yeni anlayışlara ve bileşimlere ulaşma konusunda bir usta"...

Masaki Kashiwara 1947'de Tokyo'ya yakın bir şehirde doğdu. Matematiğe olan ilgisini, Japonya'da ilköğretim matematik eğitiminde geleneksel olarak kullanılan "tsurukamezan" sorularıyla uğraşırken keşfetti. Bu sorularda turnalarla kaplumbağaların sayılarının doğru olarak hesaplanması istenir. Örneğin kafaların sayısı "x" ve ayakların sayısı "y" olsun. Kaç turna ve kaç kaplumbağa vardır? Küçük Masaki, bu problemi cebirsel yöntemlerle çözmekten hoşlanıyordu. Tıpkı şu örnekteki gibi: Her bir turnanın iki, her bir kaplumbağanın ise dört ayağı vardır. Turnaların (t) ve kaplumbağaların (k) sayısını hesaplamak için şu denklemlerin çözülmesi gerekir: $2t + 4k = y$ ve $t + k = x$. Örneğin 16 ayak ve 5 kafa görünüyorsa bu durumda 2 turna ve 3 kaplumbağa var demektir.



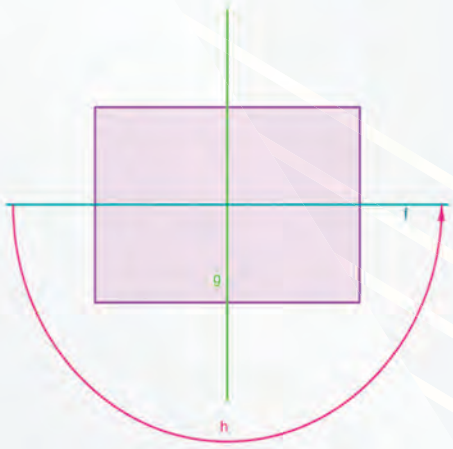
Bu tür sorulara ilişkin genellemeler yapmaktan hoşlandığını fark eden Kashiwara, eğitim aldığı tüm okullarda yüksek başarı gösterdi. Tokyo Üniversitesindeki hocası matematikçi Mikio Sato'yla tanıştıktan sonra da kendini bu tür problemlerin çözümlerine adadı. Aslında Kashiwara tam da doğru zamanda doğru yerdeydi çünkü Sato ve çalışma arkadaşları o sıralar matematiğin iki ayrı alanı olan analizi ve cebiri birleştiren tamamen yeni bir matematik dalı geliştiriyordu: Cebirsel analiz...

Abel Ödülü

Abel Ödülü, matematik alanındaki üstün katkıları onurlandırmak ve tüm dünyada matematiğin saygınlığını yükseltmek amacıyla Norveç Hükûmeti tarafından 2002 yılında oluşturuldu. Ünlü Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel'in adını taşıyan ödül, çeşitli alanlardaki matematik araştırmalarında dönüşüm niteliğinde etkiler gösteren çalışmaları takdir etmeyi amaçlıyor. Nobel Ödülleri'nin prestijine denk bir matematik ödülü olarak tasarlanan Abel Ödülü, kuruluşundan bu yana çalışmaları ile kuramsal ve uygulamalı matematiği derinden etkileyen öncüleri onurlandırıyor. Her yıl düzenlenen ödül törenleri kapsamında matematik alanındaki uluslararası iş birliklerini güçlendirmeye ve gelecek nesilleri matematikle ilgilenmeye teşvik etmeye katkıda bulunacak etkinlikler yapılıyor. Abel Ödülü dünyanın her yerinde matematikçileri motive etmeye devam ediyor.

Simetriler

Kashiwara'nın aralarında bağlantı kurduğu alanlarla ilgili biraz fikir edinebilmek için simetri kavramına bakmakta fayda var. Bir yapıya uygulanan döndürme, öteleme, yansıma gibi dönüşümler sonucu yapının kendisi ile çakışması simetri olarak tanımlanır. Simetrileri genellikle görsel olarak hayal ederiz. Tıpkı bir şekli değiştirmeyen dönüşümlerde olduğu gibi. Bir örnek vermek gerekirse bir dikdörtgenin dikey ya da yatay eksenine göre ayna görüntüsünü alırsak ya da dikdörtgeni 180 derece çevirirsek dikdörtgenin görünümünde bir değişiklik olmaz. Kare olmayan bir dikdörtgen için bu dönüşümler hiçbir müdahalede bulunmama şeklindeki dönüşümle birlikte dikdörtgenin simetrilerini oluşturur.



Kare olmayan bir dikdörtgenin simetrileri: Bir dikdörtgenin dikey (yeşil) ya da yatay (mavi) eksenine göre ayna görüntüsünü alırsak ya da dikdörtgeni 180 derece döndürürsek, dikdörtgenin görünümünde bir değişiklik olmaz. Tüm bu dönüşümler, hiçbir müdahalede bulunmama şeklindeki dönüşümle birlikte dikdörtgenin simetrileridir.

Bu simetriler, bütün olarak ele alındığında kendine yeten bir sistem oluşturur. Yani bir simetrinin ardından başka bir simetri uygulandığında sonuçta yine bir simetri elde edilir. Örneğin dikdörtgenin önce yatay eksene göre sonra da dikey eksene göre ayna görüntüsünü almak, dikdörtgeni 180 derece döndürmeye karşılık gelir: Köşeleri işaretleyip işaretlerin her dönüşümden sonra hangi konuma geldiğini izleyerek bunu görebiliriz. Bu simetrilerin oluşturduğu koleksiyona ait her bir simetri geri de alınabilir. Örneğin tek bir simetriyi üst üste iki kez uygulamak, dikdörtgendeki tüm noktaları başlangıçtaki konumuna getirir.

Simetri koleksiyonunun sahip olduğu bu özellik, bu koleksiyonun matematikçilerin adlandırmasıyla bir grup olduğunu gösterir.

Dikdörtgene art arda simetriler uygularken elde edilen sonuçları takip etmek zahmetli olabilir. Ancak bunun için aşağıdaki gibi basit bir tablo kullanılabilir. Ayna görüntüsü alma işlemlerinin g ve f, döndürme işleminin ise h harfiyle gösterildiği sol sütundaki şekilde, f ve g işlemleri art arda uygulandığında elde edilecek simetri, tablodaki f satırı ve g sütununun kesişiminde yer alan hücrede yer alan h yani 180 derece döndürme işlemidir.

	e	**f**	**g**	**h**
e	*e*	*f*	*g*	*h*
f	*f*	*e*	*h*	*g*
g	*g*	*h*	*e*	*f*
h	*h*	*g*	*f*	*e*

Bu tablodaki harfler dikdörtgenin, soldaki grafikte gösterilen simetrilerini temsil ediyor. "e" harfi hiçbir müdahalede bulunmama şeklindeki simetriyi gösteriyor.

Geometrik simetriye sahip olmayan ancak yine de gruplar oluşturan matematiksel nesneler bulmak mümkündür. Bunun örneklerinden biri matrislerdir. Matrisler, sayıların satırlar ve sütunlar biçiminde dizildiği yapılar olarak tanımlanabilir. Bir matrisin başka bir matrisle çarpımının sonucu yine bir matristir. Bu tür bir koleksiyondaki her bir ögeye bir harf atamamız durumunda, tam olarak bir dikdörtgenin simetri grubundan elde ettiğimize benzer bir tablo elde ederiz.

Bu da soyutlama yapabilmek için harika bir fırsat sunar. Grupları belirli nesnelerden oluşan bir koleksiyon olarak değil, harflerden oluşan bir

tablonun betimlediği şekilde, belirli kurallara göre etkileşime giren soyut nesneler koleksiyonu olarak düşünebiliriz. Bir grubu tanımlayan, o grubu oluşturan nesnelerin doğası (somut ya da soyut oluşu) değil onların nasıl etkileştikleridir.

Grupları bu şekilde ele almak, soyut bir yaklaşımdır ve yapmakta olduğumuz şey artık soyut cebirdir. İncelediğimiz şey soyut nesnelerden oluşan koleksiyonların yapılarıdır. Başka tür yapılara sahip başka tür koleksiyonlar da vardır. Örneğin koleksiyonumuz tam sayılar kümesi ve kuralımız toplama işlemi ise, bu yapı bir grup oluşturur. Bu yapıya bir de ikinci bir kural olarak çarpma işlemini eklediğimizde, çarpma ve toplama işlemleriyle birlikte tam sayılar kümesi, "halka" adını verdiğimiz başka bir cebirsel yapıya dönüşür.

Bu tür bir soyutlama ise gücünü şundan alıyor: Nesnelerin soyut koleksiyonları hakkında bir bilgiye sahipseniz, bu bilgi bu koleksiyonların kapsadığı herhangi bir somut nesne koleksiyonu (örneğin şekillerin simetrileri, matrisler ya da bu şablona uyan başka yapılar) için de geçerli olacaktır.

Abel Ödülü'nü kazanan ilk Japon matematikçi olan Kashiwara, *Nature* dergisine verdiği röportajda ödülü kazandığını sürprizli bir şekilde öğrendiğini, çevrim içi bir toplantıya davet edildiğini ve toplantının konusunu bilmediğini söylüyor.

"Kashiwara, yetmişten fazla matematikçiyle ortak çalışmalar yapmış olan son derece üretken bir matematikçi. Elli yılı aşkın bir süre içinde cebirsel analizi ve farklı yönleriyle temsil kuramını yeniden şekillendirerek önemli ölçüde zenginleştirdi. Çalışmaları çağdaş matematiğin ön saflarında yer almakta ve nesillere ilham vermeye devam etmektedir." Abel Ödülü'nün resmi duyurusundan...

Değişmeyen Tek Şey Değişim

Dünyada her şey hareket ya da değişim hâlindedir, hiçbir şey olduğu gibi kalmaz. Devasa dağ kütleleri hatta kıtalar bile değişim geçirir. Bu değişimler matematiksel olarak türevler yardımıyla ifade edilebilir. Öyle ki fiziğin tüm alanlarında diferansiyel denklemler adı verilen türevlere dayalı denklemler kullanılır. Diferansiyel denklemler fizikten biyolojiye, kimyadan ekonomiye ve mühendisliğe kadar matematiğin gerçek hayattaki problemlere uygulandığı hemen her durumda devreye girer. Burada karşılaşılan sorun ise bu denklemlerin hayli karmaşık olma eğilimi göstermesi hatta bu denklemlerin bazılarını çözmenin imkânsız olmasıdır.

Matematikçiler açısındansa bu karmaşıklık cezbedicidir. İşte bu yüzden de diferansiyel denklemler tek başlarına bir araştırma alanı oluşturur. Matematikçiler bu denklemleri, onları ortaya çıkaran gerçek hayat problemleriyle ilgilenmeksizin inceler. Hatta gerçek hayat problemlerine dayanmayan denklemlerle bile ilgilenirler. Bunun için kullanılan araçlar ise Calculus'ta karşılaştığımız araçlardır. Calculus, temel bilimler ya da mühendislik okuyan hemen hemen her öğrencinin aldığı temel matematik dersinin de konusudur. Calculus, değişimi anlayabilmek için sonsuz derecede küçük matematiksel büyüklüklerle, limitlerle ve buna benzer kavramlarla ilgilenir.

Matematiğin Calculus'ta kullanılan araçlara dayanak sağlayan, aynı zamanda Calculus'taki teorem ve kuralların mantıklı, doğru ve kanıtlanabilir olmasını sağlayan alanı ise analiz olarak adlandırılır.

Cebirsel Analiz

Görüldüğü gibi cebir ve analiz birbirinden hayli farklı alanlar. Cebir daha üst düzey ve soyut görünürken analiz daha ayrıntılı ve karmaşık bir imaj çiziyor. Ancak aslında bu ikisi arasında önemli bağlantılar var.

Analiz fonksiyonlar gibi matematiksel nesnelerle uğraşır. Bunun bir örneği, birikiminiz ayda 1.000 TL artmaktayken x ay sonra kazanacağınız parayı ifade eden f (x) = 1000x şeklindeki fonksiyondur.

Matematiksel nesneler olarak bakıldığında fonksiyonlar birleştirilebilir, örneğin bir fonksiyonun ardından başka bir fonksiyon uygularsak sonuç yine bir fonksiyon olur. Dolayısıyla fonksiyon koleksiyonlarını yukarıda simetri koleksiyonlarını değerlendirdiğimiz açıdan inceleyebiliriz. Bu tür koleksiyonlar gruplar ya da halkalar gibi cebirsel yapılar da oluşturabilir. Aynı durum, fonksiyonları değişim hızlarıyla ilişkilendiren diferansiyel operatörler için de geçerlidir.

Bu da cebirle analiz arasında bir bağlantı oluşturur. Cebirsel analiz alanında bu bağlantıdan yararlanılarak diferansiyel denklemleri ilgilendiren problemleri çözmek için cebir kullanılır. Matematikçiler cebirin gücünden bu bağlamda uzun süredir faydalanıyor. Ancak cebirsel analizin sistematik bir araştırma alanı olarak ortaya çıkışı Mikio Sato'nun eseri.

Sato ile Tokyo Üniversitesinde 1970'li yıllarda tanışan Kashiwara, yüksek lisans eğitimini onun danışmanlığında aldı. Henüz 23 yaşındayken tamamladığı yüksek lisans tezinde D-modülleri kuramını geliştirdi. Temelde diferansiyel denklemlerle ilişkili cebirsel yapılar olan bu nesneler, cebirsel analizin temel unsurlarından biri hâline geldi ve bunların matematiğin pek çok alanında son derece kullanışlı araçlar oldukları anlaşıldı.

D-modüllerinin matematiğe sunduğu katkılardan biri, matematikçi David Hilbert'in 1900 yılında Paris'teki Uluslararası Matematik Kongresi'nde öne sürdüğü bir problemle ilgili. Riemann-Hilbert problemi adlı bu problem, Hilbert'in yirminci yüzyılın matematik dünyasında gündem oluşturacağını tahmin ettiği 23 problemin 21.'si idi. Teknik ayrıntılara girmeden ifade etmeye çalışırsak Hilbert'in 21. problemi, belirli bazı simetrilere uyan çözümlere sahip diferansiyel denklem sistemlerinin her zaman bulunup bulunamayacağını sorguluyordu.

Problemin en basit versiyonu başka matematikçiler tarafından çözüldü. Ancak Kashiwara bu çözümleri başlangıçta Hilbert tarafından ortaya konulandan bile çok daha genellenmiş bir kapsamda kanıtlamayı ve formüle etmeyi başardı. Kashiwara, bu konuda hâlâ çalışıyor ve yeni yaklaşımlar sunmaya devam ediyor.

Trifonov_Evgeniy / iStock

Soyut Yapıların Temsili

Kashiwara'nın Riemann-Hilbert probleminden ilham alarak yaptığı çalışmalar, Abel Ödülü'yle takdir edilen temsil kuramı alanındaki çalışmalarıyla da bağlantılı.

Temsil kuramı bizi tekrar cebirdeki gruplar fikrine götürüyor. Grupların soyut elemanların koleksiyonu olarak düşünülebileceğini belirtmiştik. Bu elemanların tam olarak ne olduğunu

bilmemize gerek yoktu, grubu tanımlayan bunların birbirleriyle etkileşim biçimleriydi.

Bu soyutlama güçlü bir yaklaşım sunsa da aynı zamanda fazlaca muğlak. Bir grup üzerinde çalışırken o grubu oluşturan elemanların tam olarak ne olduklarını bilmek faydalı olabilir. Ayrıca birden fazla grup üzerinde çalışırken onları oluşturan elemanların aynı türden olup olmadığını bilmek de önemlidir. Ne de olsa elmayla armudu karşılaştıramayız.

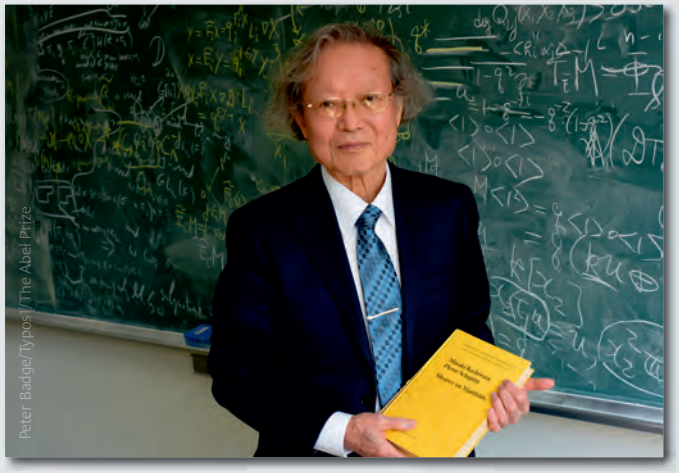
Neyse ki matematiğin doğası bu noktada matematikçilere önemli fırsatlar sunuyor. Pek çok grubun, özellikle de sonlu sayıdaki elamanlardan oluşanların daha önce de sözünü ettiğimiz matrislerden oluştuğunu düşünmek mümkündür.

Daha genel olarak elimizde soyut bir grup varsa tam olarak bu grubu oluşturacak bir matrisler koleksiyonu bulma olasılığımız hayli yüksektir. Bu da avantajları olan bir durum çünkü matrisler matematikçiler tarafından oldukça iyi anlaşılmıştır.

İşte temsil kuramı grupların ve başka cebirsel yapıların, vektör uzayları üzerinde etki gösteren matrisler olarak incelendiği araştırma alanını ifade ediyor. Vektör uzaylarını farklı boyutları temsil eden sayı doğrularının oluşturduğu kuramsal boşluklar olarak hayal edebiliriz. Örneğin tek boyutlu bir vektör uzayını ilkokulda dört işlemi görselleştirmek için kullanılan sayı doğrusu olarak, iki boyutlu vektör uzayını ise matematikte iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çizdiğimiz X ve Y eksenlerinden oluşan düzlem olarak hayal edebiliriz. Boyut sayısı üçten fazla olan vektör uzaylarını görsel olarak hayal edemesek de matematikte bunlar da kullanılır.

Temsil kuramı, matematiğin pek çok farklı alanında faydalı olan önemli bir araştırma alanı. Kashiwara'nın D-modülleri kuramı da temsil kuramına devrim niteliğinde katkılar sağladı.

Kashiwara'nın matematiğe yine bağlantılar kurarak yaptığı katkılardan biri de, kuramsal fizik alanında ortaya çıkan bazı problemlerden esinlenerek temsil kuramında kristal bazları kavramını ortaya atmasıydı. Bu nesneler temsil kuramındaki problemlerin kombinatorik yöntemleriyle ele alınabilmesine imkân tanıyor. Kombinatorik, nesnelerin sayılması, düzenlenmesi ve eşleştirilmesiyle ilgilenen bir matematik dalı. Genellikle belirli kurallar veya kısıtlamalar altında nesneleri seçmek ve sıralamak için farklı yolları araştıran kombinatorik; olasılık, optimizasyon ve bilgisayar bilimi problemlerini çözmekte temel bir araç olarak kullanılıyor. Kashiwara'nın ortaya attığı kristal bazları kavramı, kendine ayrıca sayı kuramında ve istatistiksel fizikte de uygulama alanı buldu.


Peter Badge/Typos1/The Abel Prize

Kashiwara'nın çalışmaları, soyut düşünceye dayalı alanlarda matematiğin sınırlarını genişletti ve özellikle karmaşık yapıların anlaşılmasına yardımcı olacak güçlü yöntemler geliştirilmesine öncülük etti. Akademik yaşamı boyunca ortaya koyduğu çok sayıdaki yenilikçi fikir hem kuramsal matematikte hem de fizik gibi başka pek çok bilim dalında yeni yaklaşımlara kapı araladı. Öğrencileri ve birlikte çalıştığı bilim insanlarıyla birlikte kurduğu üretken ortam sayesinde matematik dünyasında kalıcı bir etki bıraktı. Kashiwara'nın matematiğe yaklaşımı, çalışmaları ve düşünme biçimi kendisinden sonraki nesillerin de matematiğe bakış açısını derinleştirecek ve zenginleştirecek bir miras niteliğinde... ■

Kaynaklar

https://plus.maths.org/content/abel-prize-2025
https://www.nature.com/articles/d41586-025-00949-9
https://www.scientificamerican.com/article/top-math-prize-recipient-wedded-algebra-and-calculus-to-found-a-new-field/