

Sinema Problemi

Bir sinemada bilet fiyatları şöyledir: Tam 10 YTL, emekli 50 YKr, öğrenci 10 YKr. Bu sinemada bilet satan kişi bir anlık dalgınlıkla tüm hesapları karıştırır. Kasada tam tamına 100 YTL olduğuna göre ve 100 bilet satıldığına göre acaba biletçiye şu anda sinemada kaç tam biletli, kaç emekli ve kaç öğrenci olduğunu söyleyebilir misiniz?



Sayıardan Piramit

Şimdi sayıları kullanarak bir piramit yaratalım. Bu öyle bir piramit olsun ki tabandaki komşu iki sayının toplamı bir üstteki sayıyı versin ve bu şekilde tepeye doğru yükselsin. Örneğin şekilde 1, 3, 4, 7 sayılarında oluşturduğumuz ve zirvesi 31 olan piramidi görüyorsunuz. Sizden istediğimiz 1, 3, 4, 8, 9, 12 sayılarını tabanda kullanarak zirvesi 200 olan piramidi oluşturmanız. Hadi bakalım kolay gelsin!



Garanti mi?

Size rasgele seçilmiş 5 tane pozitif tamsayı veriyoruz. Bu verilen beş sayı içerisinde seçeceğimiz üç sayının toplamının her zaman 3 ile bölüneceğini garanti edebilir misiniz? Örneğin verilen sayılar 1, 4, 6, 11, 14 olsun. $4+6+11 = 21$ sayısı 3'e tam bölünür. Verilen beş sayıdan bağımsız olarak bu her durumda geçerli midir?

Dakik Tren



Ülkemizde pek alışık olmasak da Matematikistan'da trenler tam vaktinde hareket eder. Yine bir gün bir tren tam belirtilen saat ve dakikada gardan hareketine başlar. Ortalama hızı 33 km/saat olan trenin kondüktörü tam 8 km sonra saatine bakar ve akrep ile yelkovanın tam üst üste olduğunu görür. Acaba tren saat ve dakika olarak kaçta hareket etmiştir? (Göründüğünden daha zor olan bu problemi çözebilmek için kesirli sayılarla çalışmanız ve yuvarlama yapmamanız gerekiyor.)

Geçen Ayın Çözümleri

Mutlu Yıllar

Öncelikle eşitliği düzenleyelim: $(1/5)^{2006} = 2^{2006} \cdot 10^{-2006}$. Buradaki 10^{-2006} teriminin sadece sayının kaç basamaklı olacağı üzerine etkisi var. Son basamaklı rakamı bulmak için 2^{2006} terimini hesaplamamız yeterli. Mod 10'a göre 2, her 4 ifadede bir kendini yeniler. $2^1 = 2 \pmod{10}$, $2^2 = 4 \pmod{10}$, $2^3 = 8 \pmod{10}$, $2^4 = 6 \pmod{10}$, $2^5 = 2 \pmod{10}$, ... Sayımız $2006 = 4 \cdot 501 + 2$ olduğuna göre $2^{2006} = 4 \pmod{10}$ olur. Demek ki en küçük basamakta 4 rakamı yer alır.

Denklemin Üssü

Üç farklı koşulda eşitlik geçerli olabilir: 1) $x^2 - 11x + 30 = 0$ iken, 2) $x^2 - 7x + 11 = 1$ iken, 3) $x^2 - 7x + 11 = -1$ ve üs çift iken. Birinci durumda kökler $x=6$ ve $x=5$ 'dir. İkinci durumda denklemi sağlayan değerler $x=2$ ve $x=5$ olur. Üçüncü durumda kökler $x=3$ ve $x=4$ 'tür ama bu köklerin geçerli olabilmesi için üsün çift olduğunu göstermemiz gerekir. Üste $(x-5)(x-6)$ olduğu için bu iki terimden mutlaka biri çift olur ve tek*çift = çift elde edilir. O halde eşitliği sağlayan x değerleri $x=2, 3, 4, 5$ ve 6 'dır.

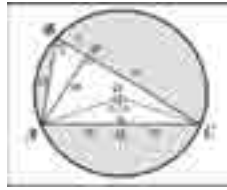
Kardunya Krallığı

Bir tablo yaparsanız 6, 10 ve 15 kardun ile 30'la 40 arasındaki tüm değerleri elde edebileceğinizi göreceksiniz. Bu demek oluyor ki

40'dan büyük tüm değerler elde edilebilir. Mesela 77 kardunu elde etmek istiyorsunuz. Önce oluşturduğunuz tablodaki gibi 37 kardunu elde ederseniz ardından 10'luk kardun ile 77'e ulaşırsınız. Bu 40'dan büyük tüm sayılar için geçerli. Şimdi gelelim 30'dan küçük sayılara. Biraz deneme yanılma jimnastiği ile şu değerlerin 6, 10 ve 15 sayıları ile elde edilemeyeceğini görebilirsiniz: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 17, 19, 23, 29. Böylece Kardunya ülkesinde yasak olan tüm fiyatları bulmuş olduk.

Sıradan Görünüm

Sorunun çözümü gizlenmiş Pisagor üçgenini görebilmekten geçiyor. A noktasından BC'ye bir dikme indirelim. ABP ve APC üçgenlerinde Pisagor teoremini kullanarak şekildeki kenar uzunluklarını elde edebiliriz. Ardından çemberin merkezi ile A ve C noktalarını birleştirelim. O noktasından AC'ye dikme indirdiğimizde AOC açısını da ikiye bölmüş oluruz. Dikkat ederseniz ABC açısı ile AOC açısı aynı yayı görüyorlar. Şimdi yapacağımız tek şey BPA üçgeni ile OQA üçgeni arasında benzer üçgen eşitliklerini yazmak. $AB / AO = PA / QA$. Yani $25 / AO = 24 / 20$. Bu durumda çevrel çemberin yarıçapı $r = AO = 25 \cdot 20 / 24 = 20.83$ olur.



Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Renkli Toplar



Mutlaka arkadaşlarınızla "Mastermind" adıyla da bilinen o topaların rengini ve sırasını tahmin et-

me oyunundan oynamışsınızdır. Eskiden sadece kağıt kalemle oynanan oyun dünyada öyle yaygınlaştı ki artık en küçük oyuncakçıda bile oyunun özel oyun tahtalarını bulabiliyorsunuz. Oyunun dünyada bu kadar popüler olmasının en büyük nedenlerinden biri tabii ki kurallarının son derece basit olması: Öncelikle rakibiniz belli sayıdaki rengin içinden belli sayıda topu seçiyor (topların farklı renkte olması gerekmiyor) ve bu topları istediği sırada diziyor. Ardından siz de en az sayıda tahminde bulunarak topaların renklerini doğru sırada bulmaya çalışıyorsunuz.

Normalde her yaptığımız tahmin sonrasında rakibiniz kaç tane topun hem yerini hem rengini bildiğinizi ve kaç topun rengini doğru ama yerini yanlış tahmin ettiğinizi söylüyor. Ancak bu noktada Matematik Kulesi olarak oyunun kurallarına müdahale edeceğiz. Bizim biraz matematikselletirdiğimiz "mastermind" oyununda rakibiniz yaptığınız her tahmin sonrasında size cevap vermeden önce şu yeni kuralı göz önüne alacak:

- 1) Eğer tahmininizdeki bir topun hem rengi hem de yeri doğruysa +2 puan kazanacaksınız.
- 2) Eğer tahmininizdeki bir topun rengi doğru ama yeri yanlışsa +1 puan kazanacaksınız
- 3) Karşınızdaki rakip her tahmininizden sonra size kazandığınız toplam puanı bildirecek.

Mesela rakibiniz kırmızı-mavi top sırasını seçmiş olsun. Eğer siz mavi-kırmızı tahminini yaparsanız rakibiniz size +2 puan kazandığınızı bildirecektir. Çünkü iki rengi doğru ama yerlerini yanlış tahmin etmiş durumdasınız.



Oyunun yeni kurallarını da açıkladıktan sonra asıl sorumuzu soralım: Eğer rakip her bir top 3 farklı renkten biri (ör: kırmızı, sarı, mavi) olacak şekilde 2 top seçerse (ör: kırmızı-sarı, mavi-mavi, sarı-kırmızı, ...) en az kaç tahmin yaparak topaların renklerini ve sıralarını bulmayı garanti edebilirsiniz? Tüm olasılıkları değerlendirerek sizce uygulanabilecek en iyi strateji nedir? Önümüzdeki ay bu sorunun cevabıyla birlikte "Matematiğin Şaşırtan Yüzü" bölümünde görüşmek üzere...