

MATEMATİK

PE SİHİR

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü

Hocalarının geleceğinden umutlu olduğu başarılı bir lise öğrencisi, 13 yaşında kötü bir arkadaş edinir: Martin Gardner. O sıralar 44 yaşında olan Martin Gardner matematik oyunlarına ve içinde matematiksel fikirler olan sihirli kâğıt gösterilerine meraklıdır. Bir yıl önce başladığı *Scientific American* dergisindeki matematik köşesinde yıllar içinde üç yüz konu işleyecektir. Matematiğin eğlenceli yönlerine duyduğu ilgiyi genç arkadaşı Persi Diaconis'e bulaştırır. Persi'nin arkadaş seçimi konusundaki sabıksa, ertesi yıl o sıralar 55 yaşında olan ve 98 yaşında ölünceye kadar yirminci yüzyılın pek çok sihirbazını yetiştirecek olan Dai Vernon'la tanışmasıyla sürer. Persi kâğıt oyunlarında el çabukluğunu o dereceye

çıkartır ki kötü arkadaşı Dai Vernon ona okulu bırakıp kendisiyle turneye çıkmasını önerir. Persi ailesine haber vermeden okuldan kaçar. Bir 14 diğeri 55 yaşında olan bu ikili New York ile Güney Amerika sahilleri arasında işleyen yolcu gemilerinde bazen poker oynayarak bazen de sihirli kart gösterileri yaparak bir yıl kadar gezer ve para kazanır.

Persi okulda geçirdiği dönemde o kadar parlak bir öğrencidir ki öğretmenleri girmedikleri mezuniyet sınavlarında onun için geçer notlar icat edip onu mezun ederler. Persi bu durumu ancak pek çok üniversiteden burs teklifi almaya başlayınca fark edecektir. Bir sihirbaza da ancak böyle bir mezuniyet yaraşır!



Kâğıt Oyunları

Persi'nin aklını çelen ve yirminci yüzyılın en büyük sihirbazlarından biri olarak anılan Dai Vernon'a bir gün bir genç yanaşıp "Ben de kâğıt oyunları yapıyorum. Siz ne çeşit oyunlar biliyorsunuz?" diye sorar. Vernon "bana rastgele bir kâğıt söyle" der. Genç adam bir kâğıt söyler. Vernon elini cebine atar, bir deste çıkarır, karıştırır, kestirir ve en üstteki kâğıdı açıp gence gösterir, "Söylediğin kâğıt buydu değil mi? Peki, sen neler yapıyorsun?" der.



Dai Vernon, (1894-1992) Sihirbaz

Yine de bugün internete girip "dünyanın en iyi kâğıt oyunu hangisi?" diye sorarsanız karşınıza Vernon'un oyunu çıkmaz. Ne de olsa Vernon'un oyunu zekâ ve bilginin yanı sıra muazzam bir el çabukluğu gerektirir ve bunu herkes yapamaz. Oysa internetin size sunacağı ve dünyanın en iyi kâğıt oyunu adıyla tanıtacağı oyunda sadece matematik vardır.



En İyi Kâğıt Oyunu

Bu oyunu sizlere *İğne Deliğinden* köşemizin yazarı Emre Sermutlu ile beraber sunacağız. Önce Emre arkasını dönecek ve ben size bir deste kâğıt uzatıp istediğiniz beş kâğıdı seçmenizi isteyeceğim. Seçip bana verdiğiniz beş kâğıdı, Emre hariç, herkese göstereceğim. Bir tanesini sizlere de gösterip kapatacağım ve elimde kalan dört kâğıdın neler olduğunu Emre'ye söyleyeceğim. Emre arkasını dahi dönmeden kapatılan kâğıdın hangisi olduğunu hemen söyleyecek.

Hayret dolu bakışlarınız altında bu oyunu istediğiniz kadar tekrarlayacağız. Her seferinde Emre tereddüt dahi etmeden kapatılan kâğıdın hangisi olduğunu söyleyecek.

Aramızda telepati olduğuna inanmaya başladığınızda bunu kabul edeceğiz ama herhangi biriyle bir odada beş dakika yalnız kalırsak ona da telepati gücümüzü aktarabileceğimizi iddia edeceğiz. Rastgele seçilen iki kişiyle bir odaya girip Emre'yle aramızda olduğundan şüphelendiğiniz telepati gücünü onlara aktaracağız. Onlar da gelip aynı sihirli gösteriyi gerçekleştirecek.

Ortada bir sihir veya telepati olmayacağından şüphelenip soğukkanlılığınızı tekrar kazandığınızda o odada iki arka-

daşınıza oyunun püf noktasını anlattığımızı fark edeceksiniz ve siz de düşünmeye başlayacaksınız. Benim Emre'ye açık olan dört kâğıdı söylememle Emre'ye beşinci kâğıt hakkında ne gibi bir bilgi aktarmış olabileceğimi araştırmaya başlayacaksınız.

Hayret dolu bakışlarınız altında bu oyunu istediğiniz kadar tekrarlayacağız...

...

Aramızda telepati olduğuna inanmaya başladığınızda bunu kabul edeceğiz ama...

Dört Kâğıt Bir Bilgi

Dört kâğıdın dördünü aynı anda söylemem mümkün değil. Bunları mutlaka sıralı söyleyeceğim. İstediğim sırayı seçebilirim. Dört kâğıdın yirmi dört değişik sıralanışı vardır: $4!=24$. Elli ikilik desteden Emre'ye dört kâğıt gösteriyorum. Dışarda kırk sekiz kâğıt var. Oysa ben ona bilgi olarak sadece bir ile yirmi dört arasında bir sayı iletebiliyorum. Kapalı kâğıdı seçebilmesi için bir bilgiye daha ihtiyacı var. Eğer amacımız sadece göz boyama olsaydı ses tonumu değiştirerek bu ek bilgiyi de Emre'ye aktarır, kapalı kâğıdı bulmasını sağlardım. Ama sadece matematik kullanarak bu ek bilgiyi oluşturmam mümkün.

Güvercin Yuvası İlkesi

Öğrencilerin “bu bilgi gerçek hayatta ne işimize yarayacak!” diye figan etmekle kalmayıp internet sitelerinde de alenen alay etmekten zevk aldığı bir önermedir güvercin yuvası ilkesi. Şöyle der bu ilke: Yuva sayısından daha fazla güvercin bu yuvalara yerleştirilirse, içinde birden fazla güvercinin olacağı bir yuva mutlaka bulunacaktır.

Bu ilkenin basitliğiyle dalga geçilen sitelerden birinde bir okuyucu dayanamayıp bu ilkenin şaşırtıcı bir şey söylemediğini, ama çok şaşırtıcı uygulamaları olduğunu yazmıştır.

İşte şaşırtıcı bir uygulama: Düzlemde her noktayı ya kırmızıya ya da yeşile boyayalım. Bunu fiziksel olarak yapmak mümkün değil, ama konumuz matematik. Her noktaya “kırmızı” ya da “yeşil” adlarından birini rastgele veriyoruz. Sonra seyircilere dönüp rastgele bir uzunluk belirlemelerini istiyoruz. Diyelim ki 57 cm dediler. Aralarındaki mesafe 57 cm olan aynı renkte iki noktanın mutlaka olacağını, hatta sonsuz tane böyle çift bulabileceğimizi iddia ediyoruz. Bu iddiamızı derin matematik bilgisi olmayan genel izleyicilerin bile anlayacağı bir şekilde ispatlayacağız.

Güvercin yuvası ilkesini kullanacağız elbette.

Düzlemde rastgele bir nokta seçeceğiz ve bir köşesi bu nokta olan, kenarları 57 cm olan eşkenar bir üçgen çizeceğiz. Bu üçgenin üç köşesi var ve bu köşeler iki renge boyanmış. Yani iki yuva üç güvercin var. Bir yuvada mutlaka birden fazla güvercin olmalı. Bu üçgenin en az iki köşesi aynı renge boyanmış olmalı. İşte aralarında 57 cm olan aynı renkte iki nokta.

Başlangıçtaki noktayı rastgele seçerek bu işlemi sonsuz defa tekrarlayıp sonsuz tane aynı renkte çift bulabiliriz.

Sayılarla ilgileniyorsanız şunu deneyin. Hangi sayıyı alırsanız alın onun mutlaka sadece 1 ve 0 kullanılarak yazılabilen bir katı vardır. Örneğin $3 \times 25 = 100$ ve $43 \times 7 = 1001$. Hatta $5291 \times 2100 = 11.111.100$.

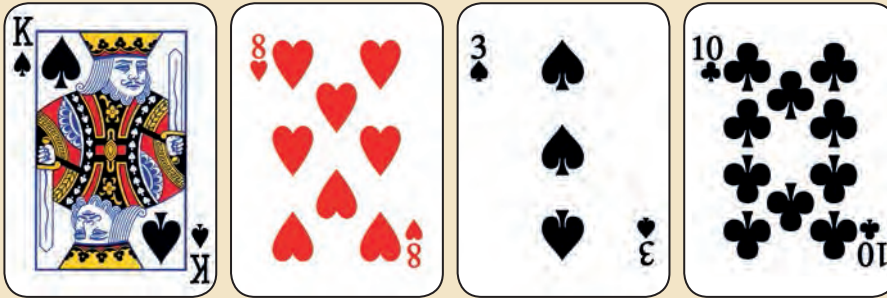
Burada olduğu gibi 3, 43 ve 5291 sayılarıyla başlamak yerine hangi n sayısı ile başlarsanız başlayın mutlaka öyle bir m sayısı bulacaksınız ki $n \times m$ sayısının basamaklarında sadece 0 ve 1 kullanılacak. Bunu güvercin yuvası ilkesini kullanmadan ispatlamayı kimse istemez. Size bir ipucu vereyim: Aynı iddia 0 ve 1 yerine 0 ve 8 kullanıldığında da geçerlidir. Hatta 0 ve 8 yerine 0 ve 3 de kullanabilirsiniz.

Güvercinlerden Kâğıtlara

Seyirci bana beş kâğıt verdi. Destede sadece dört cins kâğıt var: Maça, kupa, karo ve sinek. Elimde beş kâğıt olduğuna göre bunlardan en az ikisi aynı cinsten: Güvercin yuvası ilkesi.

Aynı cinsten olan kâğıtlardan birini masaya kapatıyorum ve Emre'ye ilk gösterdiğim kâğıt masaya kapatığım kâğıdın cinsinden olan diğer kâğıt. Emre şimdi o cinsten dışarda kalan on iki kâğıttan hangisini kapatışımı bulacak. Bu bilgiyi ona elimde kalan üç kâğıdı sıralayarak vermem gerekiyor, ama üç kâğıdı $3!=6$ olduğu için 6 farklı şekilde sıralayabilirim ve Emre'ye birle on iki arasında bir sayı yerine sadece birle altı arasında bir sayı aktarabilirim.

Biraz daha düşünmek gerekiyor.



Masada kapalı olan kâğıt hangisi?

Hayatımızı Belirleyen Tercihlerimizdir

Az önce ikisi aynı olan kâğıtlardan birini rastgele kapatmıştım. Acaba bu tercihi bilinçli yapıp Emre'ye eksik olan mesajı iletebilir miyim?

Önce Emre'yle birden altıya kadar sayıları birbirimize nasıl aktaracağımıza bakalım. Kâğıtları 1, 2, 3, ..., 10, vale, kız, papaz olarak sıralayacağız. Vale için 11, kız için 12, ve papaz için de 13 sayılarını düşüneceğiz. Ayrıca sinekler diğer kâğıtlardan, karolar kupa ve maçalardan ve kupalar da maçalardan küçük sayılacak. Bu durumda en küçük kâğıt sinek birli, en büyük kâğıt da maça papazı olacak.

Emre'ye göstereceğim en küçük kâğıda A, ortanca değerdeki kâğıda B, en büyüğüne de C dersek, bu kâğıtların sıralanışını şu şekilde deşerlendirebiliriz:

- 1=ABC
- 2=ACB
- 3=BAC
- 4=BCA
- 5=CAB
- 6=CBA

Eğer seyircilerin seçtiği beş kâğıdın içinde kupa beşlisi ve kupa sekizlisi varsa, masaya kupa sekizlisini kapatacağım. Emre'ye kupa beşlisini göstereceğim ve diğer kâğıtları BAC sıralamasıyla göstereceğim.

Bu sıralama yukardaki tabloda üçe karşılık geliyor. Emre ona gösterdiğim kupa beşlisine üç ekleyip kupa sekizini bulacak ve seyircilere kapalı kâğıdın kupa sekizlisi olduğunu söyleyip onların şaşkınlıktan küçük dillerini yutmalarına neden olacak.

Eğer elimdeki kupa beşlisinin yanında kupa sekizlisi yerine kupa kızı olsaydı masaya kupa kızını kapatıp Emre'ye yine kupa beşlisini gösteremezdim. Kupa kızının kâğıt değeri on iki ve beşten on ikiye varmak için gereken yedi sayısı yukardaki tabloda yok. Bu durumda masaya kupa beşlisini kapatacağım ve Emre'ye önce kupa kızını gösterip kalan kâğıtları CBA sıralamasıyla göstereceğim. Emre buradan altı sayısını alacak ve kızın değeri üzerine altı kâğıt sayacak: Papaz, 1, 2, 3, 4, 5. Böylece beşlinin kapatıldığını anlayacak.

Aynı cinsten on üç kâğıt var. Bunlardan biri masada kapalı duruyor, diğeri elimizde. Bu cinsteki on üç kâğıdı bir çember etrafına sırayla dizsek ve rastgele iki tanesini çıkaracak kalan kâğıt dizilerinden birinin uzunluğu mutlaka beş veya daha az olacak. Yani $11=m+n$ yazdığımızda ya n altıdan küçük ya da m . İkisi birden altı veya daha büyük olamaz. Bunu da bir çeşit güvercin yuvası ilkesi olarak görmek mümkün: On bir güvercini iki yuvaya yerleştiriyoruz.

Kısacası seyircileri büyüleyen bu kâğıt oyunu sadece güvercin yuvası ilkesini kullandı.

Martin Gardner,
(1914-2010)
Amerikalı matematik ve fen yazarı.

1956-1981 yılları arasında *Scientific American* dergisinde *Mathematical Games* köşesini yazdı ve yaklaşık 70 kitap yayımladı.

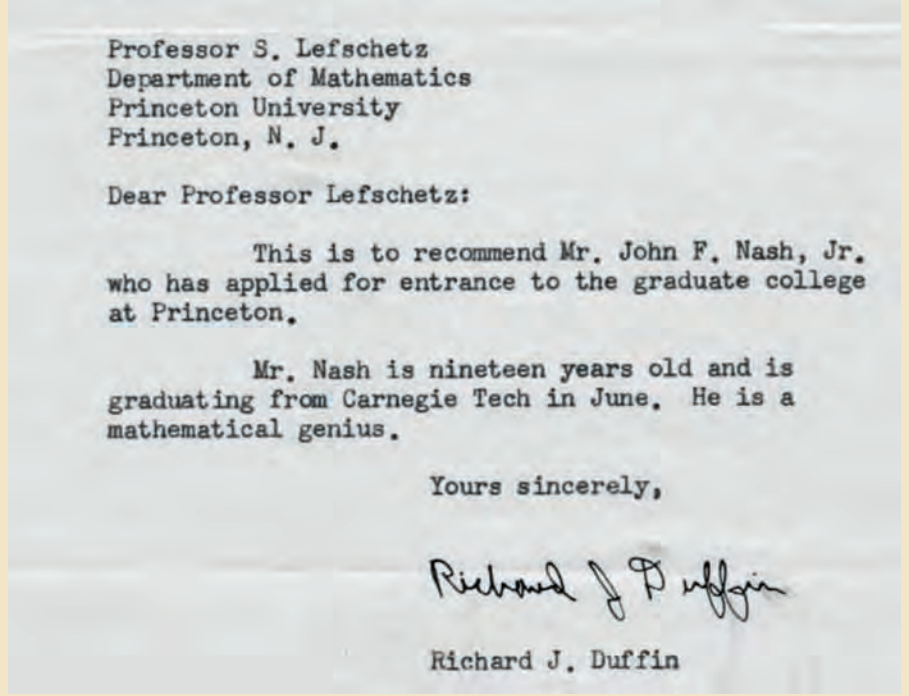
Arkadaş Yardımı

Bir arkadaşı Persi'ye yaptığı oyunlarda olasılık hesaplarının işe yarayacağını söyledi ve bir kitap önerdi. Persi bu kitabı okuyacak matematik bilgisine sahip olmadığını görünce üniversiteye gitmeye karar verdi. Yaşı artık üniversite için biraz ilerlemiş olduğundan onu ancak gece eğitimine kabul ettiler. Buradan mezun olunca Harvard Üniversitesi'nde lisansüstü çalışması yapmak istedi ama Harvard'a da herkesi almıyorlardı. İşte burada eski dostu Martin Gardner yardımına yetişti. İstatistik Bölümü'nün başkanı hem Gardner'in tanıdığıydı hem de kâğıt ve sihir oyunlarına meraklıydı. Martin Gardner Persi için yazdığı referans mektubunda "bu gencin matematik yeteneği konusunda bilgim yok, ama kâğıt oyunlarında üstüne yoktur" dedi.

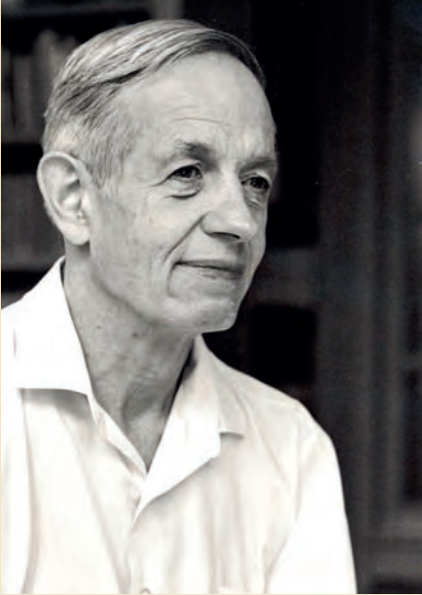


Bu mektup etkili oldu ve Persi Harvard'a kabul edildi. Daha Harvard'daki ilk yıllarında Buffon iğne probleminde katkı yapacak kadar çok çalıştı. Persi şimdi tanınmış bir matematik profesörü ve dâhilere verildiği söylenen MacArthur Vakfı Ödülü'nün de sahibi. Hepsî Martin Gardner'in yazdığı kısa bir referans mektubunun etkisiyle gerçekleşti.

Referans mektubu deyince John Nash için yazılmış olan mektuptan söz etmeden geçmek olmaz. "Mr. Nash on dokuz yaşında ve Haziran'da Carnegie Teknik'ten mezun oluyor. Kendisi bir matematik dehasıdır" yazan bu mektup neredeyse Nash'in kendisi kadar şöhretlidir.



John Nash için yazılmış olan 1948 tarihli referans mektubu



John Forbes Nash Jr., (1928-2015)
Oyun teorisi ve diferansiyel geometri üzerine çalışan Nash, 1994 Nobel Ekonomi Ödülü'nün sahibi. Daha geniş kitleler tarafından tanınması, "Akıl Oyunları" adlı filmde oyuncu Russell Crowe tarafından canlandırılmasıyla gerçekleşti.

Matematik ve Rulet

Kâğıt oyunlarından söz ederken elbette aklımıza rulet de geliyor. Ne de olsa onun da renkli sayıları var. İnternette dolaşp rulette kazanmanın yollarını ararsanız sıradan kumarbaz tavırlarını tavsiye eden sitelerin dışında matematiksel geçerliliği olan bir yöntemi tavsiye eden sitelere de rastlarsınız. Bu yöntem göre rulette bir sayıya değil renge, hatta hep aynı renge oynayacaksınız. Kaybettikçe bir önce yatırdığınız paranın iki katını yatıracaksınız. Kazanırsanız bir sonraki bahse yine en başta yatırdığınız ilk miktarı yatırarak devam edeceksiniz. Böyle oynarsanız mutlaka kazanacağınız söylenir.

Örneğin siyah renge para yatırmaya karar verdiniz ve 1 lirayla başladınız. Kaybederseniz 2 lira yatıracaksınız. Onu da kaybederseniz 4 lira yatıracaksınız. Onu da kaybederseniz toplam kaybınız şu anda 7 Lira. Şimdi kurala göre 8 lira yatırdınız. Eğer kazanırsanız yatırdığınız 8 lira sizde kalıyor ve üstüne size 8 lira daha veriyorlar. Kaybınız 7 liraydı, 8 lira aldınız, 1 lira kâra geçtiniz. Bu şekilde oynamaya devam ederseniz n kez oynayp kaybettiğinizde toplam kaybınız $2^n - 1$ liradır. Bir sonraki oyunda kazanırsanız size 2^n lira verecekler ve 1 lira kâra geçeceksiniz.

Kesin bir kazanç yolu gibi görünüyor.

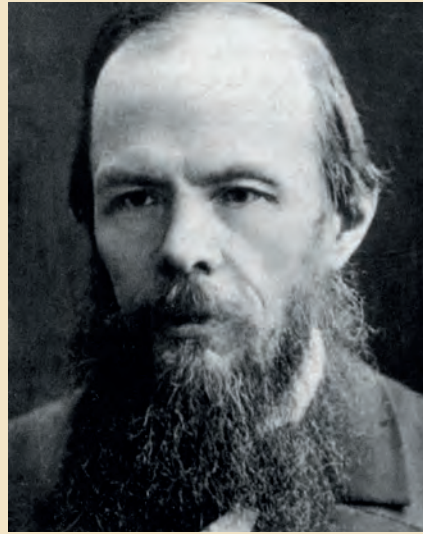
Kartsız Kart Oyunları

Aylık dergiler için kâğıt oyunları düzenleyen ve kart oyunları dünyasının en ilginç ve yaratıcı kişiliklerinden biri olan Stewart James'in evinde hiç kâğıt destesi yoktu. Buna şaşan arkadaşlarına "Agatha Christie cinayet romanı yazmak için sokağa çıkıp adam mı öldürüyordu?" diye sordu. Bu konuda hepten de haksız sayılmazdı. Satranç dünyasının en büyükleri arasında sayılan, 1921-1927 yılları arası Dünya Şampiyonu olan Jose Capablanca satranç hayatı boyunca oynadığı 567 maçın sadece 36'sını kaybetmişti. Hatta 1916 ile 1924 yılları arasındaki sekiz yıl boyunca hiç yenilmemişti. Bütün bunlara rağmen evinde satranç takımı yoktu.



Bu yöntemin sakıncası üst üste kaybettiğiniz zaman ortaya sürmeniz gereken paranın gazinonun izin verdiği üst sınırları çok aşacak olmasıdır. Örneğin 1943'te bir gazinoda üst üste tam 32 kez kırmızı gelmiştir. Siz siyaha oynadığınız için ancak 33'üncü oyunda ortaya 2³³ lira koyarsanız kazanacak ve tüm zararınızı kapatıp sadece 1 lira kâr elde etmiş olacaktınız. Bu kadar büyük miktarda bir parayı masaya sürmenize zaten gazino izin vermezdi ama eğer izin verseydi bile sadece 1 lira kazanmak için bu oyunu oynar mıydınız? Bu para ile neredeyse Yavuz Sultan Selim Köprüsü'nü yeni baştan yaptırabilirdiniz. Ortalama bir rulet seansının 4 dakika süreceği göz önüne alırsa, otuz üç seans sonra bu para karşılığı sadece 1 lira kazanacak olmanıza karşılık paranız sıradan bir bankada dursaydı o iki saat içinde size yaklaşık üç yüz bin lira kazandıracaktı.

Evet, rulette kazanmanın kesin bir yolu vardır ama aklımızı ve matematiği kullanarak bu yöntemin kullanılmasını gerektirmediğini de görebiliriz.



Fyodor Mihayloviç Dostoyevski,
(11 Kasım 1821- 9 Şubat 1881)
Rus romancı ve öykü yazarı

Kumar, hele de rulet deyince Dostoyevski'nin *Kumarbaz* adlı romanına değinmemek olmaz. Dostoyevski, kendisi de iflah olmaz bir rulet oyuncusu olduğu için bu romanda hem bir kumarbazın ruh halini hem de o camiada rastladığı kişilikleri ürkütücü bir hassasiyet ve derinlikte anlatır. Üstelik Dostoyevski bu romanı bir kumar borcunu kapatmak için yazmıştır.



José Raúl Capablanca,
(19 Kasım 1888-8 Mart 1942)
Sade ama derin oyunuyla konumsal satranca birçok yeni katkıda bulunmuştur. Yazdığı kitaplar, metinlerin basitliği ve mantıksal yapısıyla birçok satranççıya rehber olmuştur. *Satrançın Esasları* adlı kitabı dilimize de çevrilmiştir.

Biz de Stewart James gibi sadece zihinden bir kâğıt oyunu oynayalım. Bir deste kâğıttan 20 tanesini ters çevirip desteye tekrar katıyorum. Şimdi destede 32 tane yüzü yere bakan, 20 tane de yüzü yukarı bakan kâğıt var. Desteyi size verip istediğiniz kadar karıştırmanızı istiyorum. Sonra masanın altından rastgele, siz de bakmadan 20 kâğıdı ters yüz etmeden bana veriyorsunuz. Ben elimdeki 20 kâğıda bakmadan bazılarını ters yüz ediyorum ve ikimiz de elimizdeki kâğıtları masanın üzerine koyup sayıyoruz; sizin elinizde kaç tane ters kâğıt varsa benim elimde de o kadar ters kâğıt var. Masanın altında nasıl bir *sihir* yaptım da bunu sağladım?



Bu sorunun bir başka versiyonu biz öğrenciyken pek modaydı. Bir bardak A sıvısından bir kaşık alıp bir bardak B sıvısına katıyorum. İyice karıştırıyorum ve bu karışımdan bir kaşık alıp ilk bardağa geri döküyorum. A ve B sıvılarının matematiksel sıvılar olduğunu, yani birbirleriyle etkileşime girmediğini düşünüyorum. Bu durumda ilk bardakta mı daha fazla B sıvısı vardır yoksa ikinci bardakta mı daha fazla A sıvısı vardır? Bu sorunun cevabı üzerinde anlaşamayıp nişan atan arkadaşlarımız olmuştu. Gençlik işte!

Siz bunu düşünürken ben de Emre'ye elimdeki dört kâğıt olarak maça papazı, kupa 8, maça 3 ve sinek 10 göstereyim. Bakalım masadaki kapalı kâğıdı yine bilecek mi? ■

Kaynaklar

Diaconis, P., Graham, R., *Magical Mathematics*, Princeton University Press, 2012.

Diaconis, P., "Buffon's Problem with a Long Needle", *Journal of Applied Probability*, Cilt 13, Sayı 3, s. 614-618, 1976.

Kleber, M., "The Best Card Trick", *Mathematical Intelligencer*, Cilt 24, Sayı 1, s. 9-11, 2002.

DeGroot, M. H., "A Conversation with Persi Diaconis", *Statistical Science*, Cilt 1, Sayı 3, s. 319-334, 1986.



Stewart James,
(1908-1996)

Asıl mesleği posta dağıtıcılığı olan Stewart James hemen hemen tüm hayatını Kanada'nın küçük bir kasabasında geçirmiş olmasına rağmen sihirbazlık dünyasının en etkin ve en üretken üyelerinden biri olmuştur.

