30. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Prof.Dr. Okay ÇELEBİ*

13-14 Temmuz 1989 tarihleri arasında Braunschweig- Batı Almanya'da düzenlenen 30. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'nda Mehmet Aslan, Nejat Cingi, Ayşe Selma Çizmeci, Tolga Güney, Ümit Kumcuoğlu ve Mehmet Özhabeş'ten oluşan bir takım ile katıldık. Yarışmada, toplam 51 ülke vardı. 18 ve 19 Temmuz 1989 günlerinde her biri 3 soru içeren ve 4,5 saat süren iki sınav yapıldı. Değerlendirme sonunda, toplam 42 puan üzerinden Ümit Kumcuoğlu 33, Tolga Güney 26, Mehmet Aslan 24, Nejat Cingi 19, A.Selma Çizmeci 19, Mehmet Özhabeş 12 puan aldı. Böylece ülkelerarası sıralamada 133 puan ile 16. olduk. Elde ettiğimiz bu derece, yarışmaya katılan öteki ülkelerin de büyük ölçüde ilgisini çekti.

Son yılların olimpiyat sonuçları incelendiğinde, sıralamada ilk 10 dereceye giren ülkelerin hemen hemen hep aynı kaldığı görülmektedir. Çoğunlukla köklü bir matematik geleneği olan bu ülkelerde, çeşitli düzeylerde ciddî matematik yarışmaları düzenlenmekte, olimpiyat ekibini oluşturan öğrenciler ayrıntılı bir seçme ve eğitim programından geçmekte ve ekipte olmalarından ötürü lise ve üniversite seviyesinde önemli avantajlar elde etmektedirler. Bu açıdan bakıldığında da, bu yılki derecemizin önemi daha iyi anlaşılır.

Olimpiyat ekiplerimizin son yıllarda yükselen başarı grafiği ve bu yıl ekibimizin tüm elemanlarının tek tek elde ettikleri sonuçlar, bu başarıda öğrencilerin kişisel gayret ve kabiliyetleri yanısıra, verilen eğitimin önemini ortaya koymaktadır.

BİRİNCİ GÜN

1. $\{1,2,\ldots,1989\}$ kümesinin aşağıdaki özelliklere uyan, ikişer ikişer ayrık A_i $(i = 1,2,\ldots,117)$ altkümelerinin birleşimi olarak yazılabildiğini ispatlayınız.

(i) Her bir A_i kümesinde 17 tane eleman bulunsun;

(ii) A_i kümelerinin her birindeki elemanların toplamı aynı olsun.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninde, A açısının iç açıortayı ABC üçgeninin çevrel çemberi ile A_1 noktasında kesişmektedir. B_1 ve C_1 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. B ve C açılarının dış açıortaylarının AA_1 doğrusu ile kesişme noktası A_0 olsun. B_0 ve C_0 noktaları da benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri ispatlayınız:

(i) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, $AC_1BA_1CB_1$ altıgeninin alanının iki katına eşittir.

(ii) $A_0B_0C_0$ üçgeninin alanı, ABC üçgeninin alanının en az dört katıdır.

3. n ve k pozitif tamsayılar olsun. S bir düzlem üzerinde bulunan ve aşağıdaki iki koşula uyan n tane noktanın oluşturduğu küme olsun.

(i) S'deki herhangi üç nokta aynı doğru üzerinde değildir;

(ii) S'nin her bir P noktası için, bu P noktasına olan uzaklıkları aynı olan ve S'de bulunan en az k tane nokta vardır.

Bu koşullar altında

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

olduğunu ispatlayınız.

İKİNCİ GÜN

4. ABCD bir konveks dörtgen olsun ve $|AB|$, $|AD|$, $|BC|$ kenar uzunlukları

$$|AB| = |AD| + |BC|$$

koşulunu sağlasın. Bu dörtgenin içinde aşağıdaki özelliklere uyan bir P noktası vardır.

(i) P noktasının CD kenarına olan uzaklığı h kadardır;

(ii) $|AP| = h + |AD|$ ve $|BP| = h + |BC|$'dir.

Bu takdirde

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}$$

olduğunu gösteriniz.

5. Her n pozitif tamsayısı için, her biri bir asal sayının tam kuvveti olmayan, ardışık n tane pozitif tamsayının var olduğunu ispatlayınız.

6. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\{1,2,\ldots,2n\}$ kümesinin bir permütasyonu $(x_1, x_2,\ldots,x_{2n})$ olsun. Eğer bu permütasyonda en az bir $i \in \{1,2,\ldots,2n-1\}$ için $|x_i - x_{i+1}| = n$ koşulu sağlanıyorsa, permütasyona P özelliğine sahiptir diyelim.

Her n için, P özelliğine sahip olan permütasyonların sayısının, P özelliğine sahip olmayanlardan daha fazla olduğunu gösteriniz.

---

* *ODTÜ, Matematik Böl. Öğr. Üyesi ve TÜBİTAK Olimpiyat Ekibi Hazırlama Grb. Başkanı.*