

**Daltonlar**

Dalton kardeşler Joe, Jack, William ve Avel, boy sırasına göre kısdan uzuna doğru, soldan sağa dizilmişler. Her 10 dakikada bir, o anda en solda olan Dalton yerinden ayrılıp en sağdaki Dalton ile onun bir solundakinin arasına geçiyor ya da o anda soldan ikinci sırada olan Dalton sıranın en sağına geçiyor.



- (a) Dalton kardeşlerin Avel, William, Jack, Joe olacak şekilde yani baştakinin tersi bir sırada dizilmelerini sağlayacak bir hamleler dizisi var mıdır?
- (b) Dalton kardeşlerden sonuçta yalnızca Joe ile Avel'in yerlerini birbirleriyle değiştirecekleri ancak Jack ve William'ın başlangıç durumundaki konumlarına dönecekleri bir hamleler dizisi var mıdır?

**Bölünebilen Toplamlar**

Elimdeki kâğıtta hepsi de birbirinden farklı olan ve toplamları 1002 eden a, b, c, d, e, f pozitif tam sayıları yazılı. Bu sayıların,

- herhangi ikisinin toplamı 2'ye
- herhangi üçünün toplamı 3'e
- herhangi dördünün toplamı 4'e
- herhangi beşinin toplamı 5'e bölünüyor.

Sayıların en küçüğü bir basamaklı. Tüm sayıları bulabilir misiniz?

**Dört İşlem**

$$\_ X \_ = \_$$

$$\_ \_ - 3 \_ = \_ \_$$

Yukarıdaki iki işlemde yer alan tüm sayılarda 1'den 9'a kadar bütün rakamların birer kez kullanıldığı biliniyor. Sayıları bulabilir misiniz?

**Ya 2 Katı ya 1 Fazlası**

Yavuz ile Zeynep iki kişilik bir oyun oynuyor. Bir N pozitif tam sayısı belirleniyor. Tahtaya 1 sayısı yazılıyor ve sırası gelen her oyuncu, tahtadaki sayıyı silip, onun yerine ya

1 fazlasını ya da 2 katını yazıyor. N ya da daha büyük bir sayıyı ilk elde eden oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna Yavuz başlıyor.

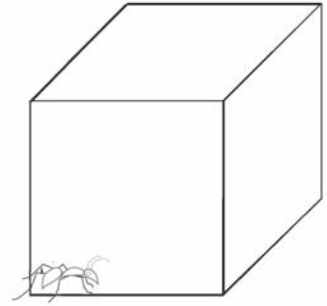
(a)  $N=16$  için hangi oyuncu oyunu kazanmayı garantileyebilir?

(b)  $N=32$  için hangi oyuncu oyunu kazanmayı garantileyebilir?

(c) n pozitif bir tam sayı olmak üzere,  $N=2n$  için hangi oyuncu oyunu kazanmayı garantileyebilir?

**Odadaki Karıncanın Dönüşü**

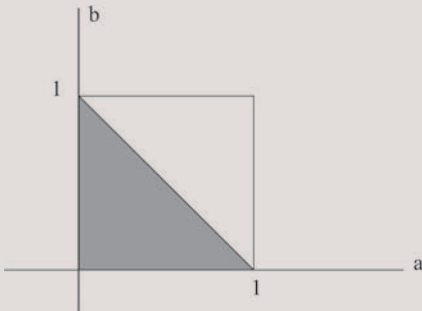
Küp şeklindeki bir odanın bir köşesinde bulunan bir karınca, bulunduğu köşeye en uzak olan köşeye ulaşmak istiyor. Ancak bu karınca, yalnızca küpün kenarlarını, yani

**Geçen Sayının Çözümleri****Üğurböcekleri**

Üğurböceklerinin her biri, hamlesinin sonucunda, bulunduğu kareden farklı renkte bir kareye ulaşır. Ancak tahtadaki siyah ve beyaz karelerin sayıları 41 ve 40'tır ve eşit değildir. Dolayısıyla hamle tamamlandığında tüm karelerin dolu olması olanaksızdır.

**Üçgenler**

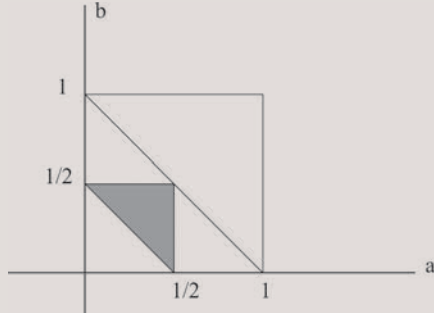
(a) İşlem yapıldıktan sonra parçaların uzunlukları a, b ve  $1-a-b$  olsun.  $0 \leq a$ ,  $0 \leq b$  ve  $a+b \leq 1$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla aşağıdaki  $\frac{1}{2}$  alanlı taralı alandan rastgele bir nokta seçtiğimizi düşünebiliriz:



Parçaların bir üçgenin kenarları olabilmesi için gerek ve

yeter koşul, kenar uzunluklarının üçgen eşitsizliklerini sağlamasıdır. Yani  $a \leq 1-a-b+b$ ,  $b \leq 1-a-b+a$  ve

$1-a-b \leq a+b$  olmalıdır. Bu eşitsizliklerin belirlediği  $\frac{1}{8}$  alanlı bölge aşağıdadır.



İstenen olasılık, bu alanın üstteki alana oranıdır, yani  $\frac{1}{4}$ 'tür.

(b) Kısa olan parça a olsun.  $a \leq \frac{1}{2}$  olduğunu biliyoruz. Bunun dışında yeni bir sınırlama yoktur; dolayısıyla a şikkındaki ilk alan  $\frac{3}{8}$ 'e düşer. Yeni olasılık  $\frac{1}{3}$ 'tür.

**Kripto-satranç**

Şah → Vezir

Vezir → Fil

Kale → At

Fil → Kale

At → Şah

**Asalade**

Eğer  $a+b+c+\dots$  kurallara uygun bir dağılımsa, bu dağılımdaki sayılardan herhangi birini asal bölenlerinden biriyle değiştirdiğimizde de kurallara uygun bir dağılım elde ederiz.

$100=2+3+5+7+11+13+17+19+23$ , ilk dokuz asal sayının toplamı olduğu için bundan daha iyi bir dağılım bulunamayacağı açıktır. Dolayısıyla,  $N=100$  için yanıt 9'dur.

$N=1000$  durumunu inceleyelim. İlk 25 asal sayının toplamı,

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+79+83+89+97=1060$$

olduğu için yanıtın 25'ten küçük olması gerekir. 2'yi içeren herhangi bir toplam başka çift sayı içeremez. 2 ile 23 adet tek sayının toplamı tek sayı olacağı için bu şekilde 1000 elde edemeyiz. 24 adet tek sayının toplamıysa en az

$$3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+79+83+89+97=1058$$

verecektir. Dolayısıyla yanıt 24'ten de küçük olmalıdır. Yanıtın 23 olduğu, aşağıdaki toplamdan görülebilir:

$$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+89+199=1000$$

iki duvarın (zeminin ve duvarın veya tavanın ve duvarın) birleştiği doğru parçalarını takip ederek ilerleyebiliyor ve bir kez uğradığı bir köşeye bir daha uğramıyor. Karınca karşı köşeye bu koşulları sağlayan kaç farklı yoldan ulaşabilir?

### Eksik Satranç Tahtası

Kartondan yapılmış 8x8'lik bir satranç tahtasının 1 birim karesini kesip çıkarmak ve kalan şeklin kopyalarını-la tüm düzlemi kaplamak istiyoruz (kopyalar kısmen de olsa üst üste gelmeden ve boş kare kalmayacak şekilde). Bu işlemi yaparken kopyaları döndürebilir ya da ayna görüntülerini kullanabiliriz. Birim kareyi nerelerden seçersek bu işlemi yapmamız olanaklı olacaktır?

### Cosimo'nun Bahçesi

4x4'lük bir satranç tahtası şeklinde düzenlenmiş bir bahçenin her karesinde çiçek açabilen bir ağaç var. Eğer bir ağacın bulunduğu kare ve ona komşu olan karelerdeki (kenar ve çapraz) ağaçlardan çiçek açmış olanların sayısı bir tek sayı ise, bu ağacın bir sonraki yılda da durumu değişmiyor. Bu sayı bir çift sayı ise, ağacın durumu değişiyor (yani bu yıl çiçek açmışsa bir sonraki yıl çiçek açmıyor, açmamışsa açıyor).

Bahçenin hep aynı kalması için çiçek açmış ağaçların hangi karelerde olması gerekir?

### Değişme Özelliği

$$\begin{array}{r} 243634485 \\ - 22435 \\ \hline 19284 \\ - 19230 \\ \hline 5448 \\ - 3205 \\ \hline 22435 \\ - 22435 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243634485 \\ - 228051 \\ \hline 155834 \\ - 152034 \\ \hline 380085 \\ - 380085 \\ \hline 0 \end{array}$$

### Dikdörtgenler ve prizmalar

(a) Dikdörtgenin kenarları a ve b birim olsun.  $2(a+b)=ab$  eşitliğinden,  $a|2b$  ve  $b|2a$  olduğunu görürüz.  $2b=ak$  dersek,  $4+2k=ak$  olduğu, dolayısıyla  $k|4$ , buradan da  $k=1,2$  ya da 4 elde edilir.  $k=1$  için  $a=6$  ve  $b=3$  bulunur.  $k=2$  için  $a=b=4$  çıkar.  $k=4$  durumundan da  $a=3$  ve  $b=6$

bulunur. Dolayısıyla koşulu yalnızca 6x3 ve 4x4 dikdörtgenler sağlar.

(b) Ayrık uzunlukları a, b, c olsun.  $abc=2(ab+bc+ac)$  eşitliği bize  $a|2bc$  olduğunu söyler.  $2bc=ak$  dersek,  $ak=4b+2k+4c$ , yani  $(a-2)k=4(b+c)$  elde ederiz. Bu iki eşitlikten,  $k=bc-2b-2c$  olduğu görülür. k'nin değerini  $ak=2bc$  denkleminde yerine koyarak  $(a-2)bc=2a(b+c)$  elde ederiz.  $a>2$  olduğu açıktır. Eğer b ve c'nin her ikisi de en az 6 ise,  $b+c \leq 2bc/6$  eşitsizliği kullanılarak,

$$(a-2)bc=2a(b+c) \leq 2abc/3$$

ve buradan da  $a \leq 6$  elde edilir. Yani ayrık boylarının en az biri en çok 6 birim olmalıdır. En kısa ayrıta a diyelim. a için olası değerler 3, 4, 5, 6'dır. Bunları inceleyerek aşağıdaki çözümlerin, tüm çözümler olduğunu buluruz:

- (3, 7, 42)
- (3, 8, 24)
- (3, 9, 18)
- (3, 10, 15)
- (3, 12, 12)
- (4, 5, 20)
- (4, 6, 12)
- (4, 8, 8)
- (5, 5, 10)
- (6, 6, 6)

## ÖDÜLLÜ SORULAR

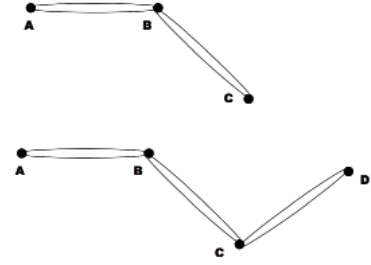
### Azimli Kurbağa

En alt rafı yerden 20 cm yüksek ve raf aralıkları da 20 cm olan bir kitaplığın önünde, yerde bekleyen bir kurbağa, her hamlesinde  $\frac{1}{2}$  olasılıkla bir üst rafa ulaşıyor;  $\frac{1}{2}$  olasılıkla da sıçraması başarısız oluyor ve yere düşüyor (kurbağanın yerde bulunduğu bir anda yaptığı bir sıçramanın sonucunda başarısız olup hamlesinin sonunda yerde kalma olasılığı, diğer durumlarda olduğu gibi  $\frac{1}{2}$ ). Eğer kurbağa herhangi bir hamlesinde 4. rafa ulaşabilirse, bu rafın üzerinde her şeyden habersiz uyuyan bir sivrisineği yiyecek.

Kurbağanın 10 sıçrayış yapacağı biliniyor; sivrisineğin mideye indirilme olasılığı nedir?

### I Robot

(a) Her parçası 1 m uzunlukta doğrusal bir çubuk olan ve iki parçanın birer ucundan birleştirilmesiyle oluşan bir robot kolu, düzlemde rastgele bir pozisyonda duruyor. Robot kolunun açık uçlarının (ilk şekilde A ve C) arasındaki uzaklığın 1 m'den kısa olması olasılığı nedir?



### "Ödüllü Sorular" yanıtlarınız için

e-posta: akisisel@metu.edu.tr

Posta Adresi: TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,

Atatürk Bulvarı No: 221 06100 Kavaklıdere Ankara Faks: 0 312 4276677

### Sonsuz oyun

A gezeğeninden iki oyuncu karşılaşsın, oyun sonlanmaz.

B gezeğeninden bir oyuncu, A ya da C gezeğeninden bir oyuncuya karşı hangi sırada oynarsa oynasın oyunu kazanır. B gezeğeninden iki oyuncu karşılaşsın, ikincisi oyunu kazanır.

A ve C gezeğenlerinden birer oyuncu ya da C gezeğeninden iki oyuncu karşılaşsın, ikincisi sırada oynayan oyuncu kazanır.

### Geçen Sayının Ödüllü Sorularını Doğru Yanıtlayanlar:

#### Her iki soruyu doğru yanıtlayıp kitap ödülü kazananlar:

Hasan Burak Sağlam, Mete Süzener, Eser Aygün, Şenay Engin, Özcan Ergül, Serhat Duran

#### Değişme özelliği sorusunu doğru yanıtlayanlar:

Ahmet Ceyhan, Servet Duranay, Emre Akay, Ahmet Caymaz, Burak Talay, Metin Yıldırım, Kaan Uygur, Sena Aşan

#### Dikdörtgenler ve prizmalar sorusunu doğru yanıtlayanlar:

Emrah Bıçkı, Ramazan Sağ