MATEMANYA

Deli Olacağım!

Aklınızdan herhangi bir kesirli sayı tutun.
Sonra sizce bu sayıya en yakın olan başka bir kesirli sayı.
İlk sayıdan küçük de olabilir, büyük de.
Asıl istediğim, düşünebildiğiniz en yakın sayı olsun.

Gösterebiliriz ki bu iki sayının arasında üçüncü bir sayı vardır.

Örnek olsun:
1/3 ve 1/4 sayılarını alalım.
Bu iki sayının arasında, 2/7 sayısının yer aldığı kolayca görünüyor değil mi!
Şöyle bakıyoruz:

1/3=2/6 ve 1/4=2/8;
demek ki
2/6>2/7>2/8.

Ya da n ve m doğal sayılar olmak kaydıyla, n/m ile n/(m+1) sayılarını alalım.
Bu kesirde n sayısını sabit tuttuğumuzda, m sayısı sonsuza doğru büyütülürse, n/m kesriyle n/(m+1) kesri birbirine giderek yaklaşır;

Şunun gibi:
n=2 olsun, m de 3'ten başlasın:
2/3→2/4→2/5→2/6→2/7...

sayıların arasındaki farklar ise şöyle gidiyor:
2/12-2/20-2/30-2/42-2/56-2/72...
Dikkat ederseniz bu fark 2/m(m+1) kesrine eşit.

Demek ki m çok büyüdüğünde fark hızla sıfıra doğru yaklaşacak.
Ne demiş olduk: n/m ile n/(m+1) kesirleri, (n ne olursa olsun, yeter ki sabit olsun) birbirlerine sonsuz derecede yakın olacaklardır.
Ama, m ne kadar büyürse büyüsün n/m ile n/(m+1) kesirlerinin arasında en az bir kesirli sayı olduğunu gösterebiliriz:
Hesabını yaparsak n(m+2)/m(m+1) sayısının bunlardan biri olduğunu buluruz.
Aslında biraz dikkat toplamayı gerektirdiği için, bu anlattığım yavan gelebilir.
Şimdi sadede geliyorum:
Doğal sayıları ya da sayma sayılarını düşünün: 1, 2, 3, 4, 5,...
Adı üstünde, sayma sayıları.
Bu sayıları birbiri arkasına dizip sayabiliyoruz. 2'den sonra hangi sayının geldiği konusunda herhangi bir şüphemiz var mı? Haliyle yok.

Bu sayıların, her ne kadar sayabiliyorsak da, eleman sayısı sonsuz bir küme oluşturduklarını da biliyoruz.
Tek sayılar, çift sayılar, tam sayılar kümeleri, elemanlarını teker teker sayabildiğimiz kümeler. Gerçi bu kümelerin elemanlarının hepsini teker teker sayabilmeye ömür yetmez ama gene de kavram olarak saymak mümkün.
Peki kesirli sayıları böyle saymak olanaklı mı? Yani hangi sayıdan sonra hangisi geliyor biliyor muyuz?
Size yazının başında anlattığım da budur. Kesirli sayıları arka arkaya bir büyüklük sırasına dizmek olanaklı değil. Ne kadar birbirine yakın olduğunu düşündüğünüz iki kesirli sayı alırsanız alın, onların arasında başka bir sayının olacağı kesindir.

İşte benim aklıma zarar veren nokta burada başlıyor.

İyisi mi biraz tarih:
Sağ üstte resmini gördüğünüz Georg Cantor bu sonsuz meselesine emek vermiş önemli bir matematikçi. Kabaca baktığımızda, örneğin tam sayıların sayısı ile pozitif tam sayıların ya da doğal sayıların sayısının sanki aynı olmadığı kanısına kapılırız.
Çünkü tam sayılar kümesi, hem negatif hem pozitif tam sayıları içine aldığından, sanki pozitif tam sayıların iki katı kadar elemana sahipmiş gibi görünür.

İsterseniz bunu tek sayılar kümesi ya da çift sayılar kümesi için de düşleyebilirsiniz. Örneğin tam sayılar kümesi, tek sayılar kümesinin dört katı kadar elemana sahipmiş gibi bir his uyandırıyor.

Cantor, belki de bildiğiniz bir yöntemle, aslında bunların hepsinin eşit sayıda eleman taşıdığını gösterdi. Kolay anlaşılır bir yöntem kullanmıştı: Bire bir eşleme. Her çift sayıyı kendi yarısı olan doğal sayıya gönderdiğinde, doğal sayılar kümesinin eleman sayısı ile çift sayılar kümesinin eleman sayısının aynı olduğunu gösterdi.

n herhangi bir tam sayı ise, bu sayıyı 2n sayısıyla eşledi:

$$1 \rightarrow 2;\ 2 \rightarrow 4;\ 3 \rightarrow 6; \ldots$$

Gördüğümüz gibi, her çift sayının karşısında bir doğal sayı duruyor.
O zaman bu kümelerin eleman sayısının eşit olduğu gösterilmiş oluyor.
Cantor bu tür, sayılabilir ve eleman sayıları sonsuz olan kümelere "sayılabilir sonsuz elemanlı kümeler" dedi ve $\aleph_0$ (aleph sıfır) ile gösterdi.

Bu en alt seviyedeki sonsuz oluyordu.
Kafanızı daha fazla yormayayım.
Daha üst seviyedeki sonsuzlardan söz etmeyeyim.

Aşağıda, sıraya dizilmiş olmasa da, kesirli sayıların nasıl sayılabileceğini gösteren bir grafik anlatım var.

$$\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Buradan {1, 2, 1/2, 1/3, 2/2, 3...} kümesini çıkarabiliyoruz. Bu, açıkça görünüyor ki sayılabilir bir küme. Şimdi bu kümeye 0 ve her sayının negatifini ekleyelim:

{0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3, -3...}

kümesini elde etmiş olduk.
Bu küme bazı kesirli sayıları birden fazla kez içinde bulundurmakla birlikte, tüm kesirli sayıları içinde taşıyor.

İşte Cantor'un eşlemesi:
{0, 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3, -3...}
{1, 2, 3, 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13...}

Buyrun size doğal sayılarla bire bir eşlenmiş kesirli sayılar kümesi!
İşte benim aklıma zarar veren bu!

Bir taraftan, her iki kesirli sayı arasında bir üçüncüsü olduğu için, her küçük aralıkta sayıları sonsuz olan kesirli sayılar, diğer taraftan bunları saymak mümkün olsun ve küme $\aleph_0$ olsun.

Aklım almıyor açıkçası.
Üstelik de şüpheye yer vermez şekilde doğru.

Bu sonsuz ile uğraşmak akla zarar verir arkadaşlar.

Ama insan uğraşmadan edemiyor ki!

Sevgili Cantor da ne yazık ki uğraşmadan duramamış!

Sevgiyle analım kendisini.

Muammer Abalı