ÜÇGENLERİN DÜNYASI – I

MENELAUS VE CEVA TEOREMLERİ

Üç kenarlı kapalı bir çokgenden nasibini almayan azdır. Üçgenden bahsediyoruz. Herkesin hayatına bir parça renk katmayı başaran basit ama karmaşık şekilden. Böyle basit görünüşlü bir şekilden bu kadar çok matematik çıkması matematikçileri de şaşırtmıyor değil. Tarihi çok eskilere dayanması ve basit görünmesine rağmen üçgenle ilgili hala gün ışığına çıkmamış bilgiler, cevaplanmamış sorular var.

Öncelikle şunu belirtmekte fayda var ki bu yazımızda Öklid geometrisinde tarif edilen üçgenden bahsedeceğiz, yani iç açıları toplamı 180° yapan üçgen. Böyle bir üçgen oluşturmak için düzlemde doğrusal olmayan 3 nokta bulmak yeterli. Bu üç noktayı doğru parçalarıyla birleştirdiğimizde bu meşhur şekli elde etmiş oluruz. Böylelikle üçgenin serüveni başlar. İşe onun 4 önemli noktasından bahsetmekle başlayabiliriz. Gerçi üçgen bolca ilginç noktaya sahip olmakla ünlü bir şekildir ama dört tanesi vardır ki bunları iyi anlamak gerekir.

Noktalar

Öklid Geometrisi için unutmamamız gereken gerçeklerden biri, iki noktadan yalnızca bir doğru geçtiği gerçeğidir. Bu tür bir ifadeyi çembere uygulayacak olursak şu gerçekle karşılaşırız:

“Doğrusal olmayan 3 noktadan yalnızca bir çember geçer”

Üçgenimizi çizmeye doğrusal olmayan 3 noktayla başladığımıza göre belirlediğimiz bu üç noktadan yalnız ve ancak bir çember geçirebileceğimizi bir önceki gerçekten güç alarak söyleyebiliriz. İşte bu çembere üçgenin çevrel çemberi denir ve çemberin merkezi sözünü etiğimiz 4 noktadan birini oluşturur. Diğer üçü ise kenarortayların, açıortayların ve yüksekliklerin kesim merkezi olan noktalardır.

Bu üçü için şaşırtıcı olan durum şudur: nasıl olur da 3 kenarortayın, açıortayın ya da yüksekliğin 3’ü birden (ayrı ayrı) tek bir noktada kesişmeyi başarır, hem de her üçgende?!! Kimseyi bu bilgiye bir iki üçgendeki denemeyle inandıramazsınız, inandırmanın tek yolu ispatı sunmaktan geçer.

$$\frac{|AG|}{|GA'|} = \frac{1}{2}$$

Benzerlik yardımıyla iki kenarortayın kesiştiği yer olan G noktası ile yazılmış oran 1/2 şeklinde bulunur. Benzer şekilde her kenarortay ikilisi için bu oranın aynı olduğu gösterilebilir. Buradan da üç kenarortayın G noktasından mutlaka geçtiği yani bir noktada kesiştiği sonucuna varıyoruz (bu size yeterince açık gelmediyse problemin kalan kısmını birazdan göstericeğimiz Ceva Teoremi ile bitirebilirsiniz) Açıortay ve yüksekliklerin de kendi aralarında kesişmelerinin yanısıra “*üçgende iki köşeye ait dışaortaylar ve diğer köşeye ait içaçıortay da daima tek bir noktada kesişir*” şeklinde bir teorem de var.

Menelaus ve Ceva

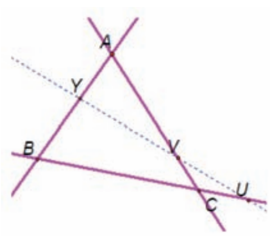
Pek çok disiplin çok çalışmayı gerektirir. Ama bu çok çalışmanın da bir tanımı olmalı. Eğer konunun ortasından dalıp yüksek başarı elde etmeyi hedefliyorsanız fazla umutlanmayın. Enerjiniz sizi idare edip yükseklere çıkarsa bile temeldeki eksiklikler bir süre sonra kendini gösterecek ve en tepeye, zirveye çıkmanıza bir şekilde engel olacaktır. Bu durum geometri için de geçerli. Çoğu zaman çözülmemiş bir problem duyduğumuzda onu çözmek için uğraşmaya başlar, saatlerimizi harcarız. Oysaki o problemin aslında biraz yüksek bir basamakta olduğunu kabul etmek zor gelir. Henüz temel bilgilerimiz tam değildir ve biz bu bilgileri tamamlamaya üşenmekteyizdir! Ama hiçbirşey için geç değil. Tekrar motive olmak için biraz sohbet etmemiz yeterli olabilir. Somut örneklerle başlayalım.

Geometriye biraz ilgi duymuşsanız Ceva ve Menelaus teoremlerini hatırlarsınız. Önce bu iki teoremi birada görelim.

Menelaus Teoremi: U,V,Y noktaları ABC üçgeninin sırayla BC,CA,AB doğruları üzerinde birer nokta olsun (noktalar A,B,C noktalarıyla çakışmasın). Bu üç nokta doğrusaldır yalnız ve ancak

$$\frac{UB}{UC}\cdot\frac{VC}{VA}\cdot\frac{YA}{YB} = +1$$

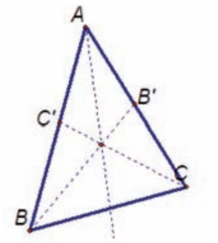
eşitliği sağlanırsa.



Ceva Teoremi: U,V,Y noktaları ABC üçgeninin sırayla BC,CA,AB doğruları üzerinde birer nokta olsun (noktalar A,B,C noktalarıyla çakışmasın). Oluşan AU, BV ve CY doğruları kesişir yalnız ve ancak

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VA} \cdot \frac{AY}{YB} = +1$$

eşitliği sağlanırsa.



Geometri derslerinden iyi bilinen bu iki teoremi burada masaya yatırmamızın birkaç önemli nedeni var. Bunlardan ilki geometri teoremlerini matematiksel ifadeye dökmenin dikkat gerektirdiğini vurgulamak. Yani yıllar sonra Ceva teoremi şekliyle aklınızda kalmış olabilir ama bu teoremi formal olarak yazmakta bir hayli zorlanabilirsiniz. İşte bu, geometriden ziyade matematik eğitimimizdeki açıktan kaynaklanır. Aklınızdaki herhangi bir tanımı ya da teoremi formal bir ifade olarak yazmayı deneyin. Eğer zorluk yaşıyorsanız bundan sonra tanımlara ve temel noktalara daha dikkatle eğilmelisiniz.

Bu iki teoremi karşımıza aldığımızda göze çarpan diğer bir nokta da teoremlerin ifadesinin hayret edilecek bir şekilde birbirine benzemesi. Sanki aynı hipotezleri sunup farklı sonuçlara varıyorlar. Yoksa siz aradaki farkı henüz göremediniz mi ? İtiraf etmek gerekirse bu farkı görebilmek biraz zor. Figürleri takip etmeyi deneyin. Bir de doğru parçalarının yönlü olduğunu unutmayın. Bunu vurgulamak için çarpımı 1'e değilde +1'e eşitledik (aynı şey!). Şayet doğru parçalarından birinin yönünü değiştirmiş olsaydık sonuç -1 de çıkabilirdi. Yani rasgele BU yerine UB yazamayız çünkü $BU = -UB$.

Ayrıca AB doğrusu üzerinde bir noktadan bahsedildiğinde onun üçgen üzerinde olmasının şart olmadığını da hatırlayın, AB'nin uzantısında ama üçgen dışında olabilir, Menelaus teoreminin figüründe görüldüğü gibi.

Vurgulamak istediğimiz diğer bir nokta da birbirine bu kadar benzeyen iki teoremin arka arkaya *keşfedilmemiş* olması. Aralarındaki yakınlıktan dolayı böyle olduğunu düşünenler çok, ama durum öyle değil. Biri diğerinden tam 1600 yıl daha genç. Genç olan ise Menelaus'un teoremi. 17. yüzyılda yaşayan Ceva, Menelaus'un teoremini inceledikten sonra bu teoremi yazıyor. Bu zaman farkı kesinlikle birisinin kolay diğerinin zor ispatlanır olmasından kaynaklanmıyor. Neden kaynaklandığını sorarsanız akla gelen tek cevap insanoğlunun gözünden kaçmış olduğunu söylemek olur. Ceva teoremi gibi olağaüstü kullanışlı ve kaliteli bir teoremin keşfedilmek için bu kadar yıl beklemesi oldukça şaşırtıcı. İspatın basitliğini gören daha da hayrete düşüyor. Ama yine de bu durum oldukça umut verici. Ne de olsa üçgenin içinde hala bulunabilir basitlikte ama yüksek kalitede keşfedilmemiş bağıntılar olması mümkün ve dahası bu bağıntıları keşfedenlerden biri olmanız içten bile değil.

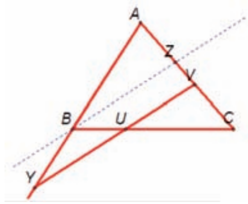
Madem tekrar geometri çalışmak için motive olmaya çalışıyoruz belki de en iyi başlangıç bu teoremlerin ispatlarını baştan keşfetmeyi denemek olur; tabi geometri displinini hakkıyla öğrenmeye çalışmaksa isteğiniz. Üstelik bizden yüzyıllar önce yaşayanlar bu teoremleri bulduysa ve bizlerin onlardan fazla matematik bilgisine sahip olduğumuz da dikkate alınırsa bu ifadeleri ispatlamamız zor olmamalı. Teoremlerden birinin ispatını burada verelim. Ama okuyucumuzdan ikisinin de ispatı üzerine biraz çalışmasını ve ispatımızı öyle incelemesini rica ediyoruz.

İspat (Menelaus)

Önce U,V,Y noktalarının doğrusal olduğunu kabul edip

$$\frac{UB}{UC} \cdot \frac{VC}{VA} \cdot \frac{YA}{YB} = +1$$

eşitliğinin olduğunu göstermeye çalışalım. Eğer bu noktalar doğrusalsa şeklimiz şöyle olur:



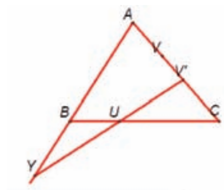
yapacağımız ilk hareket U,V,Y noktalarının üzerinde bulunduğu doğruya B'den bir paralel çizmek. Burada pek çok kişinin sorusu böyle bir doğruyu çizmeyi nasıl akıl edeceğimiz olacaktır. Belki inanmayacaksınız ama temelden çalışmanın herşeyi yavaş yavaş kavramanın bir getirisidir bu. Beyniniz gözlemlediklerini bir süre sonra alışkanlık haline getirip uygulamaya başlayacaktır. Bir geometri sorusuna baktığınızda paralel çizmek, çizgi eklemek bir süre sonra otomatik olarak yapacağınız bir işlemdir.

İspata devam! Şimdi $\frac{UB}{UC} \cdot \frac{VC}{VA} \cdot \frac{YA}{YB}$ çarpımının kaç olduğuna bir bakalım. Thales'in temel orantı teoremini hatırlarsanız figürden $\frac{UB}{UC} = \frac{VZ}{VC}$ eşitliğini rahatlıkla göreceksiniz. Aynı sebepten $\frac{YA}{YB} = \frac{VA}{VZ}$ dir. Şimdi bu eşitlikleri ifademize yerleştirirsek:

$$\frac{UB}{UC} \cdot \frac{VC}{VA} \cdot \frac{YA}{YB} = \frac{VZ}{VC} \cdot \frac{VC}{VA} \cdot \frac{VA}{VZ} = 1$$

İspatın tek yönü tamamlanmıştır. Diğer yönüne gelince

Bu sefer eşitliğimizin varolduğunu farzedip noktaların doğrusal olduğuna ulaşmaya çalışacağız. Burada kullanacağımız teknik biraz farklı. Farzedelim ki UY noktaları ile V noktası eş doğrultulu değil. Öyleyse UY, AC doğrusunu farklı bir noktada kesecektir. Bu noktaya V' diyelim:



İspatın ilk kısmındaki argümanlardan dolayı $\frac{UB}{UC} \cdot \frac{V'C}{V'A} \cdot \frac{YA}{YB} = 1$ olacaktır. Elimizde başlangıçta doğru kabul ettiğimiz $\frac{UB}{UC} \cdot \frac{VC}{VA} \cdot \frac{YA}{YB} = 1$ eşitliği var. Bu iki denklemden $\frac{V'C}{V'A} = \frac{VC}{VA}$ eşitliğini elde ediyoruz ki bu da *V'=V* anlamına geliyor ve ispatı bitiriyor.

Ceva'nın ispatını size bırakıyoruz. İpucu isteyenlere bir yön için iki Menelaus kullanmayı, diğer yön için de az önceki ispatı gözden geçirmelerini tavsiye edebiliriz. Ama bunların tek yol olmadığını unutmayın.

Üç doğrunun kesişmesi ve Üç noktanın doğrusal olması üzerine kurulmuş birbirini tamamlayan bu iki teoremle şimdilik üçgenlerin dünyasına sadece giriş yaptık. Önümüzdeki ay bu dünyanın biraz daha derinliklerine dalacağız. Bu dünyada keşfedilmeyi bekleyen daha çok şey var.

Nilüfer Karadağ

Bir Buluşum Var

Bir Daire ile İç Teğet Üçgenin İlişkisi Üzerine

Merhaba,

Ben Robert Kolej'de 9. sınıf öğrencisiyim. Derginizde böyle bir köşenin olmasını fırsat bilerek yaklaşık iki sene önce yaptığım fakat ardından bir çekmeceye kaldırdığım bu çalışmayı değerlendirmeniz için size yolluyorum...

Şekilde görüldüğü gibi kenarları *a, b* ve *c* olarak adlandırılmış bir üçgen, içinde bulunduğu dairenin yarıçapı (*r*) tarafından hayali olarak üç küçük ikizkenar üçgene bölünmüş durumdadır. Her bir ikizkenar üçgenin tabanına dik inen yüksekliklere sırasıyla h_a, h_b ve h_c denmiştir. *A* iç teğet üçgenin alanını, *Ç* ise aynı üçgenin çevresini temsil ediyor.

Dik üçgendeki Pisagor bağıntılarından faydalanarak yükseklikleri ait oldukları kenarlar ve dairenin yarıçapı cinsinden yazabiliriz.

$$\sqrt{r\text{-}(a/2)} = (\sqrt{4r\text{-}a})/2 = h_a$$
$$\sqrt{r\text{-}(b/2)} = (\sqrt{4r\text{-}b})/2 = h_b$$
$$\sqrt{r\text{-}(c/2)} = (\sqrt{4r\text{-}c})/2 = h_c$$

Buradan yola çıkarak ikizkenar üçgenlerin alanlarını içinde *h* ifadesi olmayacak biçimde yazabiliriz.

$$(a\sqrt{4r\text{-}a}\,)/4 = A_a$$
$$(b\sqrt{4r\text{-}b}\,)/4 = A_b$$
$$(c\sqrt{4r\text{-}c}\,)/4 = A_c$$

Elimizdeki ikizkenar üçgenlerin alanlarını tanımlayan bu formülleri birleştirerek büyük üçgenin alanını değişik bir yoldan ifade edebiliriz.

$$A = A_a + A_b + A_c \rightarrow [(a\sqrt{4r\text{-}a}\,) + (b\sqrt{4r\text{-}b}\,) + (c\sqrt{4r\text{-}c}\,)]/4$$

Bu adımda elde edilen sonuç tüm üçgenler için geçerli olabilir; fakat takip eden adımlarda ilgilendiğimiz üçgenin bir eşkenar üçgen olduğunu kabul edeceğim ve ortaya çıkan sonuç sadece eşkenar üçgenlerle alakalı olacak. Başka bir deyişle, biraz önceki üçgenin tüm kenarlarının ve yüksekliklerinin eşit olduklarını varsayarak ilerleyeceğim. Üçgenimizin yüksekliğinin ikizkenar üçgenlere ait bir yükseklik ile üçgenin karşı köşesinden gelen dairenin yarıçapının toplamı cinsinden yazılabilmesi için bu ikisinin ile aynı doğrultuda olması gerekir ki bu koşul, açılardan faydalanarak ispatlanabileceği gibi, ancak üçgen eşkenar olursa sağlanabilir.

$$\frac{(r+h_a)a}{2} = \frac{(r+h_b)b}{2} = \frac{(r+h_c)c}{2} = A$$

$$\frac{[r+(\sqrt{4r\text{-}a})/2]a}{2} = \frac{[r+(\sqrt{4r\text{-}b})/2]b}{2} = \frac{[r+(\sqrt{4r\text{-}c})/2]c}{2} = A$$

$$[ar + (a\sqrt{4r\text{-}a}\,)/2]/2 = ar/2 + (a\sqrt{4r\text{-}a}\,)/4 = ar/2 + A_a = A$$
$$[br + (b\sqrt{4r\text{-}b}\,)/2]/2 = br/2 + (b\sqrt{4r\text{-}b}\,)/4 = br/2 + A_b = A$$
$$[cr + (c\sqrt{4r\text{-}c}\,)/2]/2 = cr/2 + (c\sqrt{4r\text{-}c}\,)/4 = cr/2 + A_c = A$$

Bu formül kullanılarak eşkenar üçgenin alanı farklı bir yoldan hesaplanabilir. Bununla birlikte eğer çevreyi ve yarıçapı eşkenar üçgenin bir kenarı olan *a* cinsinden yazarsak bu formül üzerinden eşkenar üçgenlerin alanlarını bulurken genelde başvurulan alan formülünü türetebiliriz.

$$r = \frac{(a/2)}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{ve} \quad Ç = 3a \quad \text{ise;}$$

Dairenin yarıçapı ve üçgenin çevresine karşılık gelen bu değerleri $r \times Ç = 4A$'ya yerleştirirsek,

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \times 3a = 4A$$

şeklinde ifade edebiliriz formülümüzü.

Nihayet, bunu da A'yı tek başına bırakacak bir biçimde yeniden düzenlersek eşkenar üçgenin normalde kullanılan alan formülünü elde etmiş oluruz:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

İzlediğimiz bu yöntem bir eşkenar üçgenin alan formülünün, normalde kullanılan yol olan yükseklik ile yüksekliğin dik indiği tabanın çarpımını ikiye bölmenin dışında, üçgenin çevresi ve içinde bulunduğu dairenin yarıçapı kullanarak da türetilebileceğini kanıtlar. Bu yöntemin eşkenar üçgenlerin alan formülüne ulaşma yolunda yeni bir yaklaşım olabileceğini zannediyorum. Ayrıca "$r \times Ç = 4A$" formülünün özgün bir bulgu olup olmadığını da merak ediyorum. Değerlendirirseniz sevinirim. Teşekkürler.

Alper Özmumcu

Tam da geometri de kavramları tekrar inceleyip, üzerinde çalışmamız gerektiğinden bahsederken Alper arkadaşımızın mektubu bize örnek oldu. Geometride pek çok formül ifadeleri bu tarz eşitliklerle oynanarak ortaya çıkarılıyor. Ama bazen de ifade kısır döngüye girebiliyor ve yeni birşeyler bulmaktan uzak kalıyor. Okuyucumuzun ifadesi özgün bir bulgu değil. Aslında eşkenar üçgende herşey tekbir değişkenle idare edildiği için tek değişkenli alan formülünü kullanmak yerine 2 değişkenli (r ve Ç) alan formülünü kullanmak çok pratik olmaz. Üstelik bu değişkenler de (r ve Ç) a cinsinden ifade edilebiliyor. Özgün bir alan formülü deyince akla Heron'un formülü gelebilir:

$$A = \sqrt{\left(\frac{Ç}{2}\right)\cdot\left(\frac{Ç}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{Ç}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{Ç}{2}-c\right)}$$

Yükseklik uzunluğunu bilmediğimiz sadece üçgenin kenar uzunluklarını bildiğimiz durumlarda bu formüle başvururuz. Hazır yeri gelmişken geometri meraklılarına bu formülün çıkışı üzerine çalışmalarını tavsiye edelim. Alper arkadaşımız da çalışmalarını devam mutlaka devam ettirsin. Görünen o ki kendisi temelini sağlam tutmuş ve çalışmaya güzel bir noktadan girmiş. Bir yerlerde özgün bir formül çıkarması hiç de şaşırtıcı olmaz.

Kendi yaptıklarınızın yanı sıra mevcut çalışmaları da incelemeyi unutmayın. Başkalarının yapıtlarını incelemek size ışık tutabilir.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

**TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA**