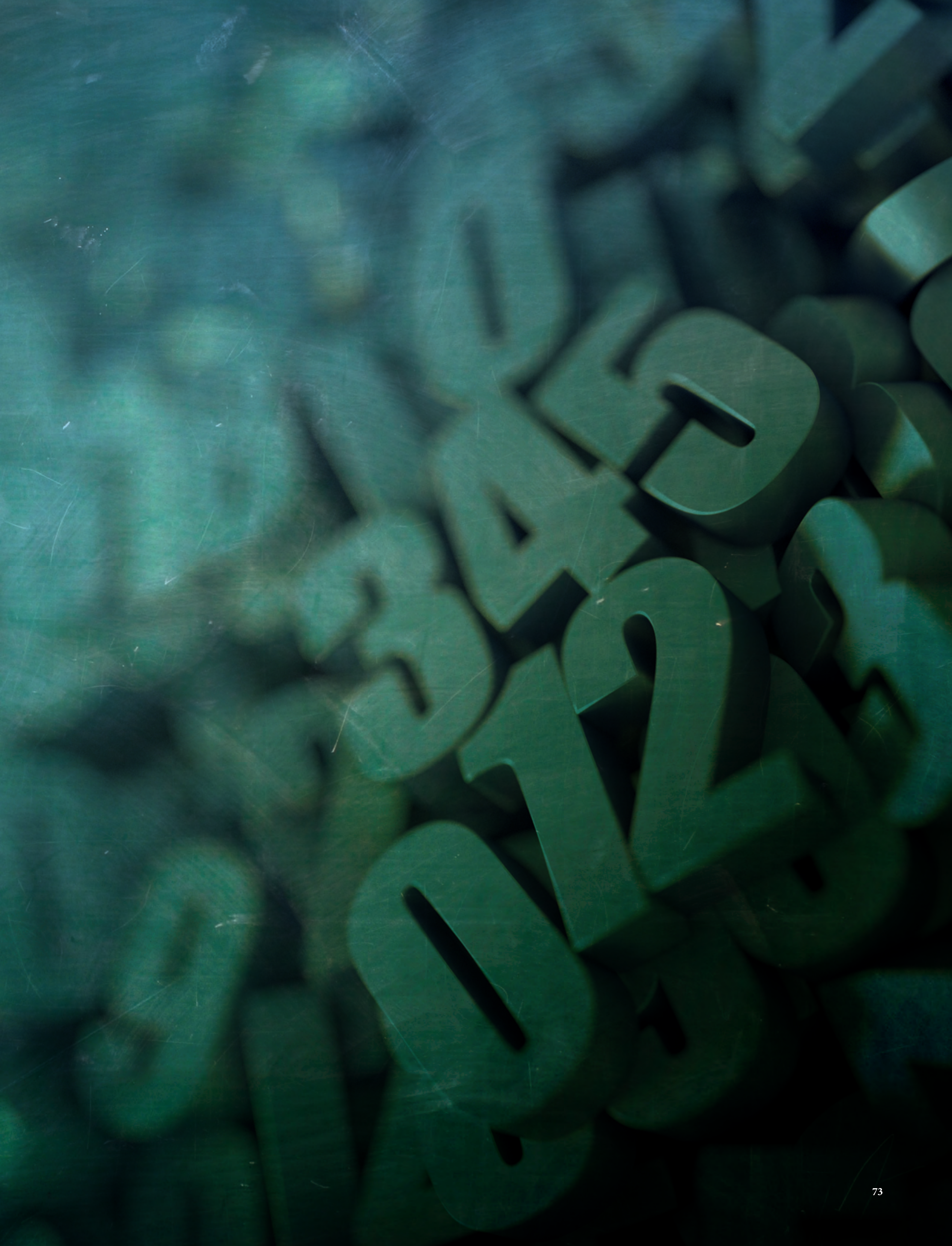
# Kaç Tane Asal Sayı Var

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [ *Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü*

**Uzayın derinliklerinde düşünen yaratıklar varsa onlarla nasıl iletişime geçebiliriz, hiç düşündünüz mü? "Evrensel dil" olduğuna inandırıldığımız İngilizcenin aslında evrensel olmadığını ve uzaylı varlıkların tek kelime İngilizce bilmeyeceklerini tahmin etmek zor değil herhâlde.**



Eğer ilk önce onlar bizi bulursa bizimle nasıl iletişime geçecekleri konusunu da önceden düşünüp çözmüş olacaklarından bizim buna şimdiden kafa yormamız gerekmez. Öte yandan bizim onların gezegenine değil gitmek, nerede olduklarını bulacak bir teknolojimiz dahi henüz olmadığı için yapabileceğimiz tek şey "Hey! Biz buradayız! Orada birileri var mı?" şeklinde bir mesajı uzaya gönderip cevap beklemek olacaktır.

Böyle bir mesaj, 1974 yılının 16 Kasım günü, Porto Riko'nun Arecibo radyo teleskobunun yenilenmesinin kutlandığı bir tören sırasında uzaya gönderildi. Bu mesaj üç dakika sürdü ve uzaya 1679 tane 1 ve 0 gönderildi. Mesajı yakalayabilecek teknolojiye sahip olan uzaylıların, hangi dili konuşuyor olurlarsa olsunlar, asal sayıları mutlaka keşfetmiş olacaklarını ve 1679'un her ikisi de asal olan 23 ve 73 sayılarının çarpımı olduğunu hemen göreceklerini bekliyoruz. Mesajın tamamında bir anlam bulamayınca mesajın içindeki 1 ve 0'ları 23x73 ve 73x23 şeklinde bir tablo olarak dizeceklerini ve bu dizilimde düzenli bir şekil tespit edip bunu çözmeye çalışacaklarını umut ediyoruz.

Gönderilen mesajda Güneş Sistemimizin temsili bir şekli ve gezegenlerin hangisinden bu mesajın gönderildiği, ortalama bir insan boyu ve mesajı gönderen teleskobun teknik özellikleri gibi bilgilerin yanı sıra gezegenimizde hayatın temel taşı olan atom ve moleküller hakkında da bilgiler var.

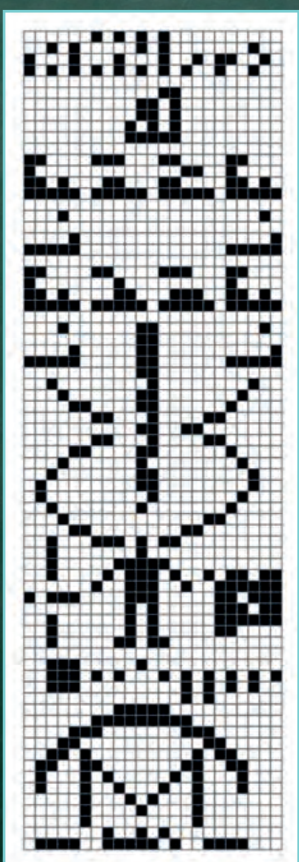
Mesajın gönderildiği gün gökyüzünde en belirgin yıldız topluluğu M13 küresel yıldız kümesi olduğu için mesaj o yöne doğru gönderildi.

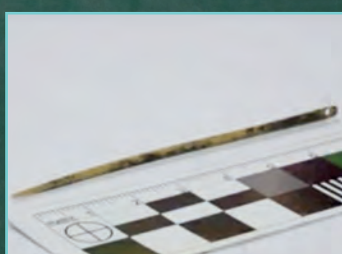
*Arecibo radyo teleskobu*

Mesajın yerine ulaşması 25 bin yıl sürecek. Eğer birkaç yılda mesajı çözüp bizim mesajı gönderdiğimiz yılki zekâ ve teknolojimizle anlayabileceğimiz bir cevap gönderirlerse bu cevabın bize ulaşması da 25 bin yıl sürecek. Yani elimize 51.974 yılından önce bir cevabın ulaşması söz konusu değil.

Elli bin yıl sonra dünyada hayat nasıl olacak? Bir kıyaslama yapmak için elli bin yıl önceye gidelim. Elli bin yıl önce Orta Asya'daki Denisova mağarasında yaşayan atalarımız kuş kemiğinden yapılmış bir dikiş iğnesi bırakmışlar bize. Yapılan kazılarda ortaya çıkan bu iğne, o dönem için beklenmedik bir teknoloji olarak algılanıyor.

Kuş kemiğinden yapılmış bir dikiş iğnesinden Arecibo radyo teleskobuna elli bin yılda geldiysek elli bin yıl sonra nerede olacağımızı hayal etmeyi bilim kurgu yazarlarına bırakıp ben bu yazımızın kahramanları olan asal sayılara döneceğim.





*Donisova mağarasında bulunan elli bin yıllık dikiş iğnesi. Acaba elli bin yıl sonrasına bizden neler kalacak?*

*Arecibo mesajı. Mesaj 73 satır 23 kolon olarak açılıp 0 olan yerler beyaz, 1 olan yerler siyah gösterilince bu şekil ortaya çıkıyor.*

# Sonsuz Tane Asal Sayı Var

Asal sayıların sonsuz tane olduğunu hepimiz biliriz. Bunu ilk kanıtlayanın kim olduğunu bilmiyoruz ama Öklid'in Elemanlar kitabındaki kanıt, ufak bir değişiklikle, bugün herkesin gözü kapalı verdiği bir kanıttır. Bunun tersini yani asallar sonlu sayıda olduğunu düşünelim. Bu durumda bildiğimiz bütün asalları çarpar ve bulduğumuz sonuca da bir eklersek elde edeceğimiz sayının bildiğimiz hiçbir asal tarafından bölünemediğini görürüz. Oysa ki her sayı bir asala bölünmeli. Bu çelişki bize asalların sonsuz olduğunu kanıtlar.

Ama Öklid'in özgün kanıtının bu olmadığını bilmeniz gerekir. Öklid der ki kaç tane asal sayı alırsanız alın, onların dışında mutlaka başka bir asal vardır. Kanıtı da yine yukarıdaki gibidir ama matematik dünyasında iddianın içeriğindeki ince farktan haberdar olmanız beklenir.

Öklid'in kanıtını sayılarla denemek istersek şöyle bir tabloyla karşılaşırız.

2+1=3
2x3+1=7
2x3x5+1=31
2x3x5x7+1=211
2x3x5x7x11+1=2311

Bu sayıların hepsi asaldır. Öyleyse neden Öklid baştan bize bunu söylemedi de lafı dolandırdı diye düşünebilirsiniz. Bunu anlamak için bir sonraki hesabı yapmanız gerekir.

2x3x5x7x11x13+1=30031=59x509.

Yani Öklid haklı. Asalları çarpıp sonuca bir ekleyince her zaman asal sayı bulmuyoruz. Bu beklentinin bozulduğu ilk sayı da 13. Nümerolojiye meraklı olanlar bunu 13 sayısına yüklenen uğursuzluğun bir sonucu olarak yorumlayabilirler.

# Biraz da Yüksek Teknoloji

Asal sayılarla oynamaya başladığınızda bunların arasının açıldığını görürsünüz. Sık sık birbirine yakın asallara rastlasanız bile genellikle asal sayılar gittikçe seyreldikleri izlenimini verirler. Gerçekten de biraz düşününce aralarında hiç asal sayı olmayan istediğiniz uzunlukta ardışık sayı bulabileceğinizi görürsünüz. Örneğin istediğiniz büyüklükte bir n sayısı seçin.

$n!+2, n!+3, n!+4, \ldots, n!+n$

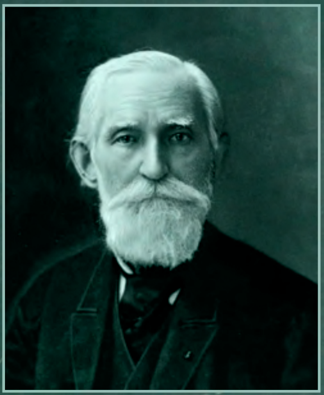
Bu sayılarının hiçbirinin asal olmadığını görürsünüz; ilk sayı 2'ye, ikinci sayı 3'e vs. bölünür. Öte yandan n büyük bir sayıysa n! çok daha büyüktür ve n! civarındaki sayılar arasında n-1 tane ardışık sayının asal olmaması pek de çarpıcı olmaz. Hesaplayabildiğiniz kadar büyük asal sayılarla oynarken asalların seyrekleşmesine rağmen aralarının çok da fazla açılmadığını görürsünüz.

İlk aklınıza gelen tahmin, her n sayısıyla 2n sayısı arasında mutlaka bir asal olacağı yönünde olacaktır. Gerçekten de her denediğinizde n ile 2n arasında bir asal bulacaksınız.

Matematikte sık sık yaşayacağınız bir olguyla karşılaştınız. Çok güzel bir sonuç buldunuz ama geç kaldınız. Eğer elinizi çabuk tutup bu gözlemi 1845'ten önce yapsaydınız bu sonuca sizin adınız verilebilirdi. Oysa Fransız matematikçisi Joseph Bertrand bu sonucu 1845 yılında buldu, üç milyona kadar olan asallar için doğruluğunu gösterdi ve bu sonucun tam kanıtının yapıldığını da ölmeden önce gördü -ama ne yazık ki kanıtı kendisi bulamadı. Kanıt Rus matematikçi Chebyshev tarafında yapıldı. Bugün bu sonuca Bertrand-Chebyshev teoremi diyoruz.

Öklid'den yaklaşık iki bin yıl sonra kanıtlanan bu yüksek teknoloji ürünü teoremi kullanarak sonsuz tane asal olduğunu görmek artık çok kolay.

Joseph Bertrand (1822-1900)



Chebyshev (1821-1894)

# Asalları Saymaya Başlıyoruz

Asalların sonsuz olduğunu anladıktan sonra akla gelen ilginç sorulardan biri de verilen bir sayıya kadar kaç tane asal sayıya rastlayacağımızdır. Her seferinde böyle uzun uzun tarif etmek yerine matematikte bu çeşit kavramlara bir isim veririz. Asalları sayan fonksiyona da $\pi$ adını veriyoruz. Böylece herhangi bir reel x sayısı için $\pi(x)$ bize x'ten büyük olmayan kaç tane asal olduğunu söyleyecek. Örneğin $\pi(10)=4$ olur.

Tüm uğraşlarımıza rağmen bugün $\pi(x)$ için bir kapalı formülümüz yok. Böyle durumlarda asimptotik davranışı anlamaya çalışırız. Yani x gittikçe büyürken $\pi(x)$ ne şekilde büyüyor diye sorarız.

Bu kez bulacağımız sonucu kimseye kaptırmamak için iki yüz yıl kadar önceye gidelim ve $\pi(x)$ nasıl davranıyor diye düşünelim.

Keşifler hemen hemen hiçbir zaman düzenli bir akıl yürütmeyle bulunmaz. Keşif yapmak matematikte de tehlikelerle dolu bir maceradır. Kristof Kolomb Amerika'yı bulmayı planlayarak yola çıkmamıştı. Amerika onun karşısına çıkmıştı. Elbette burada bir şans faktörü var ama şans da boş oturanları sevmez.

Biz de gözümüzü karartıp asalları nasıl sayacağımız konusunda, doğru olup olmadığını sonra kontrol etmek üzere fikir üretelim.

Bir n sayısı alalım. Birden n'e kadar olan sayıların yarısı ikiye bölündüğüne göre onların arasından asal çıkmayacak. Bunları çıkarıp atalım. Kalanların üçte biri üçe bölüneceğine göre onların arasından da asal çıkmayacak, onları da çıkarıp atalım. Birden n'e kadar kaç asal olacağını bize söyleyecek şöyle bir ifade bulduk.

$$n \prod_{\substack{p \le n \\ p:asal}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Bu çarpımı da sadeleştirmek istiyoruz. Matematikte bazen zor bir soruyu daha zor bir sorunun içine katıp çözmek daha kolaydır çünkü daha zor soru daha güçlü teknikler çağrıştırır ve problem kendiliğinden çözülür. Biz de burada

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ yerine } \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

ifadesini hesaplamaya çalışacağız ve meşhur geometrik dizi bağlantısı olan

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots$$

eşitliğini kullanacağız. Yukarıdaki çarpımda yer alan her bir parantezi şimdi gösterdiğimiz gibi geometrik dizi olarak yazacak, bu dizileri de birbiriyle çarpınca şöyle bir şey bulacağız:

$$\frac{1}{\prod_{\substack{p \le n \\ p:asal}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \sim \sum_{k \le n} \frac{1}{k}$$

Buradaki ~ işaretini "yaklaşık olarak böyle davranıyor" diye okumak gerek ve yazdıklarımızı da fazla sorgulamamak gerek. Ne de olsa keşif yapmaya çalışıyoruz. Henüz bir iddiada bulunmadık.

Öte yandan y=1/x eğrisinin altındaki alanın doğal logaritmayı verdiğini hatırlayarak yukarıdaki ifadenin sağındaki toplamın da yaklaşık olarak log n gibi davranacağını düşünelim.

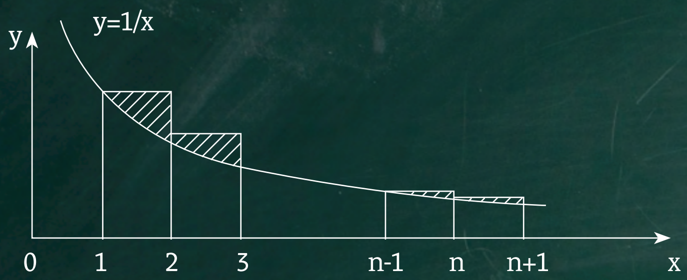
Şimdi bunları bir araya koyup ilk iddiamızı yazalım.

$$n \prod_{\substack{p \le n \\ p:asal}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{n}{\log n}$$

Bu iddiamızı başkalarına göstermeden önce büyük sayılarla deneyelim. Denedikçe göreceğiz ki sol taraf her zaman sağ tarafın yarısı kadar oluyor. Asalları sayma işine bir süre ara verip önce bu tutarsızlık neden oldu diye araştıralım. O kadar sağlam akıl yürütmemize rağmen bir taraftan öbürüne geçerken elimizdeki sayıları ikiyle çarpıverdik. Hangi tarafa güveneceğiz?

## Her Hesapta Bir Euler Vardır

Matematikte bazı sayılar vardır ki matematik ve doğa hakkında sizi felsefi düşüncelere sevk eder. Birbiriyle hiçbir ilgisi olmayan konularda hesap yaparken bu sabitlerden biri karşınıza çıkıverir. Tam da matematiğin tatsız tuzsuz hesaplardan oluşan teknikler yumağı olduğunu düşünmeye başladığınız anda muazzam bir planın küçük bir parçasına şahitlik etmekte olduğunuz duygusu sarar sizi. İşte ilk kez Euler'in bulduğu ve bugün ϒ ile gösterilen sabit böyle esrarengiz bir sayıdır. Euler bu sayıyı ilk kez 1734 yılında hesapladı. Daha sonra İtalyan matematikçi Mascheroni de bu sayıya 1790 yılında rastladı ve ilk kez kendisinin bulduğunu düşünüp yayımladı. Bu sayı için ϒ (küçük harf gamma) sembolünün kullanılması ise çok daha sonra oldu. Muhtemelen n! ifadesini reel sayılara genelleyen meşhur Γ (büyük harf gamma) fonksiyonuyla ilgili bir ifadede de ortaya çıktığı için bu sembol kullanılmış olabilir. Bu sabiti hesaplamak için önce y=1/x eğrisi çizelim.




Sonra her bir tam sayı üzerine yüksekliği 1/x olan birer kutu çizelim. Bu kutuların alanlarından y=1/x altındaki alanları çıkaralım. Yukarıdaki şekilde taralı alanlar kalan alanlardır ve bunların toplamı sabit bir sayıdır. Bu sayı $\Upsilon$ ile gösterilir ve yaklaşık olarak ½ civarında bir sayıdır. Tam olarak:

$\Upsilon$= 0,57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992 …

Asalları saymaya çalışıyorduk, şimdi nereden çıktı bu Euler sabiti dediğinizi duyar gibiyim. Unutmayın ki son derece makul hesaplar yapıp iki farklı ifadenin birbiriyle aynı davrandığını düşünmüştük ama her hesapladığımızda bunlardan birinin diğerinin iki katı olduğunu görmüştük. İşte o noktada işi gücü bırakıp bu farkın nereden kaynaklandığını aramaya karar vermiştik. Unutmayın ki Kristof Kolomb da Hindistan'ı bulacağım diye yola çıkıp Amerika'yı bulmuştu. Belki bizi de yeni bir keşif bekliyordur.

Aslında elimizi çabuk tutsaydık ve 1874'ten önceki bir tarihe gidip çok çalışsaydık yukarıdaki tutarsızlığın asıl nedenini bulabilecektik. Bunu Polonyalı matematikçi Franz Mertens buldu. Bugün Mertens'in üçüncü teoremi diye bilinen sonuç şöyle ifade edilebilir.

$$\prod_{\substack{p\le n\\ p:asal}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\Upsilon}}{\log n}$$

Burada $e^{-\Upsilon}$=0,561… olduğundan tam da bizim gözlemlediğimiz farkı açıklar.

Bu arada unutmadan ekleyeyim: Euler-Mascheroni sabitinin rasyonel bir sayı olup olmadığı henüz bilinmiyor. İsterseniz bu yazıyı okumayı burada bırakıp bu problem üzerine düşünmeye başlayabilirsiniz.

## Asalları Saymaya Devam Edelim

Demek ki elimizde asalları sayan $\pi$ fonksiyonu için, biri diğerinin yaklaşık iki katı olan iki aday var. Bunlardan birini seçmek için yine deney yapacağız. Büyük n sayıları için $\pi(n)$ sayısını hesapladığımızda çarpımlı ifademizin hep iki katına eşit bir sayı bulduğumuzu görüp onu atıyoruz.

Aslında Adrien-Marie Legendre'den önce yaşasaydık bu tahminimizle tarihe geçebilirdik. Ama Legendre bizden önce bu gözlemleri yapmış ve

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

olacağını öne sürmüş. Aslında Legendre paydadaki log x değerini büyük bulup bundan bir sayı çıkarılması gerektiğini düşünmüş ama şimdi teknik ayrıntılara girmeyelim yoksa dergi editörleri bize kızar.

Diğer taraftan, Legendre'ye atfettiğimiz $\pi(x)$ ile ilgili bu iddiaya açıklık kazandırmak gerekir. Asalların sayısıyla x/log x arasındaki fark gittikçe açılır ama bu farkın x'e oranı gittikçe küçülür. Asimptotik davranış dediğimiz budur. Wikipedia'dan aldığımız bu tabloda sayılar büyüdükçe $\pi(x)$ ile x/log x arasındaki oranın 1'e yaklaştığı ama aradaki farkın yine de sayı olarak çok büyük olduğu görülüyor.

| x | π(x) | π(x) – x/log x | π(x)/x / log x |
|---|---|---|---|
| 102 | 25 | 3,3 | 1,151 |
| 103 | 168 | 23 | 1,161 |
| 104 | 1229 | 143 | 1,132 |
| 105 | 9592 | 906 | 1,104 |
| 106 | 78.498 | 6116 | 1,084 |
| 107 | 664.579 | 44.158 | 1,071 |
| 108 | 5.761.455 | 332.774 | 1,061 |
| 109 | 50.847.534 | 2.592.592 | 1,054 |
| 1010 | 455.052.511 | 20.758.029 | 1,048 |
| 1011 | 4.118.054.813 | 169.923.159 | 1,043 |
| 1012 | 37.607.912.018 | 1.416.705.193 | 1,039 |
| 1013 | 346.065.536.839 | 11.992.858.452 | 1,034 |
| 1014 | 3.204.941.750.802 | 102.838.308.636 | 1,033 |
| 1015 | 29.844.570.422.669 | 891.604.962.452 | 1,031 |
| 1016 | 279.238.341.033.925 | 7.804.289.844.393 | 1,029 |
| 1017 | 2.623.557.157.654.233 | 68.883.734.693.281 | 1,027 |
| 1018 | 24.739.954.287.740.860 | 612.483.070.893.536 | 1,025 |
| 1019 | 234.057.667.276.344.607 | 5.481.624.169.369.960 | 1,024 |
| 1020 | 2.220.819.602.560.918.840 | 49.347.193.044.659.701 | 1,023 |
| 1021 | 21.127.269.486.018.731.928 | 446.579.871.578.168.707 | 1,022 |
| 1022 | 201.467.286.689.315.906.290 | 4.060.704.006.019.620.994 | 1,021 |
| 1023 | 1.925.320.391.606.803.968.923 | 37.083.513.766.578.631.309 | 1,020 |
| 1024 | 18.435.599.767.349.200.867.866 | 339.996.354.713.708.049.069 | 1,019 |
| 1025 | 176.846.309.399.143.769.411.680 | 3.128.516.637.843.038.351.228 | 1,018 |

Adrien-Marie Legendre matematik tarihinin efsane matematikçilerinden biridir. Yıllarca Legendre deyince gözümüzün önüne ciddi suratlı bir on sekizinci yüzyıl Fransız beyefendisinin fotoğrafı gelirdi. Tüm kitaplarda bu resim kullanılırdı. Yakın zamanda bu resmin aslında aynı soyadı taşıyan, aynı dönemde yaşamış ve Adrien-Marie Legendre ile hiçbir aile bağı olmayan bir Fransız politikacısına ait olduğu öğrenildi. Bizim matematikçi Legendre'nin ise henüz bir fotoğrafı bulunamadı ama yaşadığı dönemde çizilmiş bir portresi bulundu.

*Adrein-Marie Legendre'nin (1752-1833) suluboya portresi*

# Gauss Olmadan Matematik Yazısı Olmaz

Sayılarla ilgili bir konu olacak da Gauss o konuda derin bir çalışma yapmamış olacak. İşte bu mümkün değil!

Gauss asalların sayısıyla ilgili bu problemle kendi ifadesine göre 15 yaşında ilgilenmiş. Biz asalların sayısını x/log x olarak yakalayabileceğimizi görmüştük. Gauss bu gözlemi yapınca bir sayının asal olma ihtimalinin yaklaşık 1/log x olacağı yorumunu yapıp bu ihtimalleri toplamayı düşünmüş. Bu durumda integral hesabı yapılmalı. Gauss'un bulduğu tahmin de literatürde Li(x) olarak anılan integralle hesaplanıyor. Yani Gauss'un asal sayılar hakkındaki tahmini şöyledir:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Burada yine π(x) ile Li(x) arasındaki farkı kontrol edemiyoruz ama x büyüdükçe bu farkın x'e oranı sıfıra yaklaşır.

Asalların sayısının n/log n ifadesinden büyük olacağını biliyoruz. Her hesap yaptığımızda Li(n) ifadesinin π(n)'den büyük olduğunu görürüz. Hatta Hint matematikçi Srinivasa Aiyangar Ramanujan da bunun hep böyle olacağını iddia etmişti. Ama Li(x)- π(x) ifadesi sonsuz defa işaret değiştirir ve ilk kez L(x)'in π(x)'den küçük olacağı tahmin edilen sayı evrende var olduğu tahmin edilen atomların sayısından kıyaslanamayacak kadar büyüktür.

Bazen insan matematik yaparken içinin ürperdiğini hissediyor.

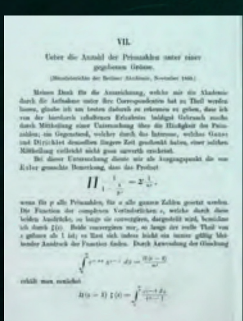
# Bize Kanıt Gerek

Hep batıya gidilirse doğuya varılacağı, Atlantik Okyanusu'nun öbür ucunun Hindistan sahilleri olduğu gibi varsayımlar hep yapılmıştı. Bu iddiaları desteklemek için çeşitli akıl yürütmeler de vardı. Ama sonunda birilerinin gemiye atlayıp bu iddiaların doğruluğunu kontrol etmesi gerekiyordu. Kristof Kolomb ve Ferdinand Magellan işte bu iddiaların ne derece doğru olduğunu hayatlarını tehlikeye atarak kontrol eden insanlardı.

Matematikte bir iddianın doğruluğunu kontrol etmek ya da o iddiayı kanıtlamaya çalışmak çoğu zaman hayati bir tehlike doğurmaz.

Asalları sayan $\pi(x)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını kanıtlamak için yapılan ilk ve en önemli çalışma yine Bernhard Riemann'a aittir. Sayılar kuramı üzerine yazdığı tek makalede zeta fonksiyonunun sıfırlarıyla asalların dağılımı arasında bir bağ kurmuş ve eğer zeta fonksiyonunun sıfırları belli bir davranış gösterirse asalları sayan $\pi(x)$ fonksiyonunun da asimptotik olarak $x/\log x$ gibi davranacağını göstermiştir.

Riemann, zeta fonksiyonunun sıfırlarıyla ilgili bu iddiasını kanıtlamadığı için asal sayıların dağılımıyla ilgili iddiası da kanıtlanmış olmuyordu.


VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

Riemann'ın zeta fonksiyonunun davranışlarıyla asal sayıların dağılımını ilişkilendirdiği makalesi.Bu makaledeki zeta fonsiyonun sıfırlarının yeri konusundaki ispatlamadığı iddiası çağımızın en önemli çözülmemiş matematik problemlerinden biridir.

Asal sayı teoremi denilen iddianın, yani $\pi(x)$ fonksiyonunun $x/\log x$ veya $Li(x)$ gibi davrandığının kanıtlandığını görmek için 1896 yılını beklemek gerekti. O yıl Jacques Hadamard ve Charles de la Vallée Poussin birbirlerinden habersiz iki kanıt yayımladılar. Bunlar, Riemann'ın açtığı yoldan ilerleyen ve zeta fonksiyonunun özelliklerini kullanarak yapılan kanıtlardı.


*Jacques Hadamard (1865-1963)*

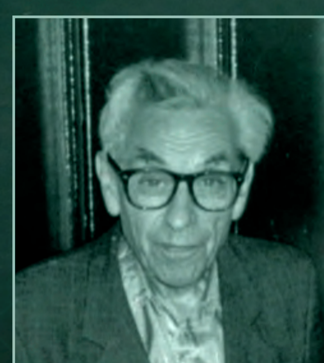

*Vallée Poussin (1866–1962)*

Karmaşık analiz kullanmadan asal sayı teoreminin kanıtının olamayacağı düşünülüyordu çünkü var olan kanıtlar hep zeta fonksiyonunun özelliklerini kullanıyordu.

Bu kanının yanlış olduğu 1949 yılında yine iki ayrı yayımla gösterildi. Aynı yıl içinde Paul Erdös ve Atle Selberg asal sayı teoreminin yalın kanıtlarını yayımladılar. Bu makaleler çıkmadan önce ve sonrasında, fikirlerin kime ait olduğu konusunda sert tartışmalar yaşadılar. Ama makalelerinde ikisi de birbirine referans verip işi tatlıya bağlamaya çalıştılar.

Matematik dünyası bu tartışmalara pek önem vermedi. Selberg 1950'de Fields Madalyası'nı, Erdös de 1952'de Cole Ödülü'nü aldı.


*Atle Selberg  (1917-2007)*


*Paul Erdös (1913-1996)*

# Cole Ödülü Deyince

Şu ana kadar asal sayılar hakkındaki çalışmaları hep yabancı adlar altında anlattık. Sizlerin de artık “onlar yapar, biz okuruz” duygusuna kapılmak üzere olduğunuzu hissettiğim için asallardan ikiz asallara geçmek istiyorum. Aralarındaki fark 2 olan asallara ikiz asallar denir. Örneğin 17 ve 19 ikiz asallardır. Bu çeşit ikiz asal çiftlerinden sonsuz tane olduğu sanılıyor.

*Cem Yalçın Yıldırım (1961- )*

Bu konuda temel çalışmaları yapan ekibin içinde yer alan Yalçın Yıldırım da takım arkadaşlarıyla birlikte 2014’te Cole Ödülü’nü aldı.

Aralarındaki fark 2 olan asal çiftlerinden sonsuz tane olup olmadığı henüz bilinmiyor. Şimdilik bildiğimiz şey, aralarındaki fark en fazla 246 olan asal çiftlerden sonsuz tane olduğu. Bu sayıyı 2’ye indirerek Yalçın Yıldırım’ın açtığı yoldan yürüyen bir sonraki matematikçimiz siz olabilirsiniz!

# Uzaydan Mesaj Var

Uzaya 1974’de gönderdiğimiz mesajın cevabını beklemekten sıkılan ve uzaya o ilk mesajın gönderilmesinde de fikir babalığı yapan Carl Sagan, 1985’te uzaydan mesaj aldığımızı anlatan bir roman yazdı. Bu roman 1997’de Robert Zemeckis yönetiminde Contact (Mesaj) adıyla beyaz perdeye aktarıldı. 51.974 yılına kadar beklemeye sabrı olmayanlar Jodie Foster’ın uzaydan 2 ile 101 arasındaki asal sayıları içeren bir mesajı alışını seyredip teselli bulabilirler.

*Mesaj filminde Jodie Foster, Arecibo gözlemevinde çalışan bilim insanı Dr. Ellie Arroway’i canlandırdı.*

*Şili’deki Atacama Çölü’nde uzayı dinleyen teleskoplar*

Bir gün radarlarımız uzaydan ısrarla tekrarlanan ve asal sayılardan oluşan bir mesaj yakalarsa bu mesajları gönderenler hakkında ne düşüneceğiz? Onlar $\pi(x)$’in asimptotik davranışının x/log x olduğunu biliyorlar mıdır, yoksa $\pi(x)$ için mükemmel bir formülleri var mıdır? Ne dersiniz? ■

**Kaynaklar**


J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction zeta (s) et ses conséquences arithmétiques, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. 24, pp. 199–220, 1896.

Valle Poussin, Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers, *Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles*, Vol. 20 B, 1896.

D. J. Newman, Simple analytic proof of the prime number theorem” (PDF). *American Mathematical Monthly*. 87 (9), pp.693–696, 1980.

D. Goldfeld, The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective. Number theory (New York, 2003), 179–192, Springer, New York, 2004.

H. M. Edwards, Riemann’s zeta Function, Dover yayınları ,1974.

Sayılar Kuramı Cole Ödülü alanların listesi: http://www.ams.org/prizes-awards/pabrowse.cgi?parent_id=15

P. Duren, Changing Faces: The mistaken portrait of Legendre, *Notices of the American Mathematical Society*, 56 (11), pp. 1440-1443, 2009.