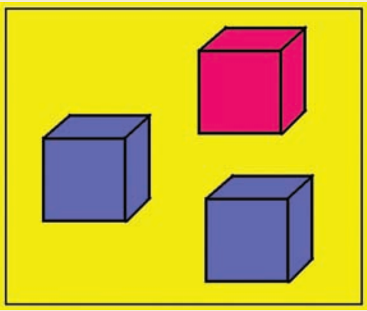
E n g i n   T o k t a ş
m a t e m a t i k _ k u l e s i @ y a h o o . c o m

Futbol Turnuvası

Her takımın birbiri ile maç yaptığı ve beraberliğin olmadığı bir turnuva düzenleniyor. Bu turnuvaya 5 takımın katılması durumunda tüm takımların turnuva sonunda aynı anda şampiyon olabileceğini ancak 6 takımın katılması durumunda bunun mümkün olamayacağını ispatlayabilir misiniz?

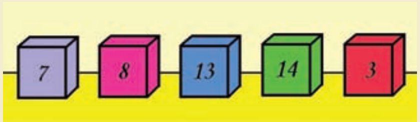
Aynı ya da Farklı

Cazibe ve Mustafa aralarında şöyle bir oyun oynarlar. İçi gözükmeyen bir torbanın



içerisine 2 tane mavi, 1 tane de kırmızı bir küp koyarlar. Önce Mustafa torbadan bakmadan bir küp seçer, ardından da Cazibe kalan küplerden birini yine bakmadan seçer. Eğer seçtikleri küplerin rengi aynıysa Cazibe kazanır, farklıysa Mustafa kazanır. Sizce bu oyun adil bir oyun mudur? Neden?

Kutudaki İkili



Üzerlerinde sırasıyla 0'dan 9'a kadar rakamların yazılı olduğu 10 adet kart, ikişerli gruplar halinde rasgele 5 kutuya dağıtılıyor. Her bir kutudaki rakamların toplamı şekildeki gibi olduğuna göre, toplamı 8 olan kutunun içerisinde hangi ikililer bulunabilir?

Hangi Sayılar?

4 ile 20 arasındaki tüm sayıların karelerini teker teker aldığımızda, elde ettiğimiz sayıların büyük çoğunluğunun iki asal sayının toplamı olarak yazılabildiğini görebiliriz. Örneğin $4^2 = 16 = 5 + 11$ ya da $5^2 = 25 = 2 + 23$ gibi. Ancak elde ettiğimiz bu sayılardan bazıları iki asal sayının toplamı olarak yazılamazlar. Bu sayıları bulabilir misiniz?

Geçen Ayın Çözümleri

Satranç Tahtası

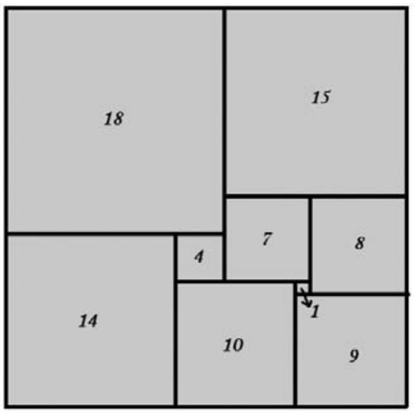
Öncelikle 1x1'lik kareleri düşünelim. Bu kareleri yatay yönde 8 farklı konuma, düşey yönde de 8 farklı konuma yerleştirebiliriz. Yani 1x1 boyutlarında satranç tahtası üzerinde $8^2 = 64$ farklı karemiz var. Aynı şekilde 2x2'lik karelerden $7^2 = 49$ tane, 3x3'lük karelerden $6^2 = 36$ tane ... 7x7 'lik karelerden $2^2 = 4$ tane ve 8x8'lik karelerden $1^2 = 1$ tane kare bulunmaktadır. O halde satranç tahtasında toplam $8^2 + 7^2 + 6^2 + ... + 2^2 + 1^2 = 204$ farklı kare bulunmaktadır.

Sayı Kutusu

Altı basamaklı sayımızı abcdef olarak gösterelim. Amacımız içinde 5 rakamı bulunmayan 6 basamaklı sayıların toplam sayısını bulmak. a rakamının bulunduğu yerde 0 ve 5 hariç 8 farklı rakam bulunabilir. b, c, d, e ve f rakamları da 5 haiç 9 farklı rakamdan biri olabilir. O halde torbada kalan toplam sayılar 8 x 9 x 9 x 9 x 9 x 9 = 472392 adettir.

İstiflenmiş Kareler

Tüm karelerin alanlarını topladığımızda 1056 birim^2 değerini elde ederiz. Bu aynı zamanda dikdörtgenin de alanını vermektedir. 1056 = 32*33 şeklinde çarpanlarına ayırmak



en mantıklısı olacaktır çünkü elimizdeki karelerle bu kenarları elde edebilmekteyiz. 1056 = (18+14) * (18+15). Kenarları bulduğumuza göre geriye sadece kalan kareleri uygun yerlere yerleştirmek kalıyor.

Kestirme Yol

Sorunun çözümü için olası tüm yolları deneyerek en kısa yolu bulmak elbette mümkün. Ancak daha teknik bir çözüm için "En Kısa Yol" algoritmalarından biri kullanılabilir (ayrıntılı bilgi için: http://en.wikipedia.org/wiki/Traveling_salesman_problem).
Soruda en kısa yol D → E → A → B → F → C güzergahı ile 44 km'dir.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

"Gizem"in Devamı

Matematik Kulesi'ni takip eden okuyucularımız Ağustos 2006 sayısında "Gizem" isimli sorumuzu hatırlayacaklardır. Sorumuz şöyleydi: "İlk sayısını rasgele seçtiğimiz dört ardışık tamsayıyı önce birbirleri ile çarpalım ardından çıkan sonuca 1 ekleyelim. İlginç bir şekilde bu işlem sonucunda her zaman bir kare sayı elde ederiz. Örneğin $2x3x4x5 + 1 = 121 = 11^2$. Sizce bu matematiğin gizemlerinden bir tanesi mi yoksa anlamlı bir açıklaması var mıdır?". Bu soru ile ilgili olarak geçen ay okuyucularımızdan Dr. Bahri Kaderoğlu'ndan son derece nazik bir mektup aldık. Mektubunda Kaderoğlu, sorumuzun daha genel bir halini yaklaşık 25 yıl önce ispatladığından ve ispatını TÜBİTAK'ın onaylandığından bahsediyordu. İspatını bizimle paylaştığı için Bahri Kaderoğlu'na çok teşekkür ediyoruz ve bu güzel teorem ile birlikte ispatı sizlere aktarıyoruz.

$$a.(a+r).(a+2r).(a+3r) + r^4 = [a.(a+3r)+r^2]^2$$

Teorem şu şekilde genelleştirilmektedir: a ve r birer pozitif tamsayı olmak üzere $a.(a+r).(a+2r).(a+3r) + r^4 = [a.(a+3r)+r^2]^2$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu teorem doğrultusunda "Gizem" isimli sorumuz, r = 1 değeri için teoremin özel bir hali olmaktadır. Bakalım r = 2 için de teorem doğru sonucu veriyor mu? a'yı yine 2 olarak alırsak $2x4x6x8 + 2^4 = 400 = 20^2$. Bu şekilde teoremi sonsuza kadar deneyemeyeceğimize göre daha genel bir ispat yapalım. $a.(a+r).(a+2r).(a+3r) + r^4$ ifadesindeki tüm parantezleri çarpım işlemi yaparak açalım ve oluşan tüm ifadeyi $a^4 + 6a^3r + 11a^2r^2 + 6ar^3 + r^4$ şeklinde toplayalım. Şimdi de teoremdeki eşitliğin sağ tarafını açalım. $[a.(a+3r)+r^2]^2 = a^4 + 3a^3r + a^2r^2 + 3a^3r + 9a^2r^2 + 3ar^3 + a^2r^2 + 3ar^3 + r^4 = a^4 + 6a^3r + 11a^2r^2 + 6ar^3 + r^4$. Görüldüğü gibi teoremdeki eşitliğin her iki tarafı da aynı değeri vermektedir. Bu da teoremin doğruluğunu ispatlamaktadır.

NOT: Dr. Bahri Kaderoğlu'nun mektubu ile birlikte bize göndermiş olduğu "Akıldan Çarpma Tekniği" adlı kendi kitabı, içerisinde çok güzel ve bir o kadar da ilginç çarpım tekniklerini barındırıyor. Akıldan çarpmaya ilgi duyan okuyucularımız, son basımı 1992 yılında yapılmış bu kitabı eminim çok seveceklerdir.