

Güzeldir Akıl Oyunları

Siz bu sayıyı elinize aldığınızda yeni okul yılı çok yaklaşmış olacak. Yeni yılda matematik derslerinde rahat etmenizi sağlayacağını umduğumuz küçük akıl oyunlarını anlatmayı sürdürüyoruz. Problem çözenin kolay yolları, esnek düşünme, ilk karşılaşmada problemden korkmama üzerine örnekler bulacaksınız.

Geçen sayımızı okuyanlar anımsayacaktır; sizlere bir soru sormuştuk. Soru şöyleydi:

İki damacana var: Biri beyaz (B), öteki kırmızı (K) şarap dolu. K şarap damacanasından bir bardak K şarap alınıp B şarap damacanasına boşaltılıyor ve karıştırılıyor. Sonra B şarap damacanasından bir bardak şarap alınıyor ve K şarap damacanasına boşaltılıyor. Acaba B şarap damacanasındaki kırmızı şarap mı daha çoktur yoksa K şarap damacanasındaki beyaz şarap mı? Bardakta kalan bulaşık miktarları ihmal edilsin.

Bu soruyla uğraşanlar olmuştur, kuşkusuz. Aslında çözüm çok kolay. İlk bardakta taşınan kırmızı şarabın az bir bölümü geri taşınıyor ikinci bardakta. İkinci bardağın "az" kırmızı şarap, gerisinin beyaz şarap olacağı ortada. Peki, ne kadarı? Beyaz şarap damacanasında kalan kırmızı şarap kadar değil mi? Azı olsa bardak dolmaz, çoğu olsa bardak almaz. Tam tamına o kadar. İşte yanıt bu. Soruyu karmaşıklığa, x'lere y'lere yönelmeye hiç gerek yok. İkisi eşit. İş bardaktan içecekten açılmışken benzer güzellikte bir örnek daha: Ayşe'ye annesi limonata yapmış. Bir sürahiye doldürmüş. Sürahi, diyelim ki 8 bardak limonata alıyor olsun. Ayşe ilk gün

1 bardak limonata içmiş ama sonra sürahiye 1 bardak su eklemiş. 2. gün iki bardak içmiş ve sürahiye 2 bardak su eklemiş. Böyle sürmüştü ve 8. gün sürahide ne varsa hepsini içmiş. Soru şu: Acaba 8. günde Ayşe ne kadar su içmiş olur? Bu sorunun yanıtını düşünürken farklı bir akıl oyunu size:

$$(1-1/4)(1-1/9)(1-1/16)...(1-1/225)$$

çarpımının sonucu kaçtır? Görüyorsunuz çok kolay bir soru. Şöyle ilerleyebiliriz: Önce her parantezin içeri hallederiz sonra da çarpabiliriz. Yani $(3/4)(8/9)(15/16)...(224/225)$. Hepi topu 15 kesri çarpacağız. Evet, bu bir yol.

Ama, ilginç bir görünüşü var bu sayıların.

$$1=1^2, 1/4=(1/2)^2, 1/9=(1/3)^2$$

$$\dots 1/225=(1/15)^2 \text{ olduğunu gözledikten}$$

sonra ve $1-1/4=1^2-(1/2)^2$ ifadesinin

iki kare farkı olduğunu da anlayınca

önümüze güzel bir yol açılabilir.

Sorudaki her parantez,

$$\text{aslında } (a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$$

şeklinde yazılabilir.

O zaman:

$$(1-1/4)(1-1/9)(1-1/16)\dots(1-1/225)=$$

$$(1-1/2)(1+1/2)(1-1/3)(1+1/3)\dots$$

$$(1-1/15)(1+1/15) \text{ halini alır.}$$

Bu da

$$(1/2)(3/2)(2/3)(4/3)(3/4)\dots(14/15)(16/15)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi bu çarpıma şöyle biraz bakın.

İlk terim olan $(1/2)$ 'den sonraki terimleri

2'şerli olarak guruplayıp sona kadar gidin;

sonda $(16/15)$ kalsın. Gördünüz mü?

Bu ikişerli gurupların her biri 1'e eşit.

13 tane 1, bir tane $1/2$ ve

bir tane de $16/15$ haline geldi.

O halde:

$$(1-1/4)(1-1/9)(1-1/16)\dots(1-1/225)=$$

$$1/2 \times 1 \times 1 \dots 1 \times 16/15 = 8/15$$

sonucunu buluverdik.

Bizden de istenen, sonucu bulmamızdı.

Sayıları biraz itip kakıp yeniden düzene

koyunca, 15 kesir çarpımı, 2 kesrin

çarpımına iniverdi. Bütün iş, soruya

iyi gözle bakıp yumuşak karnını keşfetmeyi

bilmek. Anımsayın buna sezgi demiştik.

İlk soruyu çözmeye çalıştınız mı?

Ayşe ilk gün 1 bardak su eklemişti

sürahiye. Demek ki sürahidenden doldurulan

limonatanın her bardağının $1/8$ 'i su, $7/8$ 'i

limonata. O halde,

ikinci gün 2 bardak limonata içildiğinde

$2/8$ bardak su içer Ayşe.

Üçüncü gün 3 bardak içtiğinde,

ilk günden kalan $6/8$ bardak ve 2. gün

eklenen 2 bardak su vardır sürahide.



Bunları toplarsak, 3. gün içmeden önce, $22/8$ bardak su var demektir .

Gerisi limonataydı. O halde Ayşe 3. gün $22/8.3/8 = 66/64$ bardak su içmiş oluyor.

Böyle hesaplamayı sürdürüp sonra da bunları toplarız.

Bu bir yol ama pek de tadı tuzu olan bir yol değil.

Bir de şöyle bakalım:

Ayşe 8 gün bütün sürahiyi içtiğine göre sürahiye doldurduğu bütün suyu içmiş demektir. Peki, ne kadar su doldurdu

7 günde? 1. gün 1, 2. gün 2, ... 7. gün 7 bardak. Toplayalım bunları:

Gauss formülünden $(7.8)/2=28$ bardak. Hepsini bu kadar.

İnce oran hesaplarına gerek kaldı mı?

Sakin bütün problemlerin terlemeden çözülmesi gerektiği sonucunu çıkarmayın buradan. Ama matematiğin çok yönlü düşünme ve esneklikle ne kadar güzel akıl oyunları taşıdığını da her zaman aklınızın bir köşesinde tutun.