Çizge Teorisi

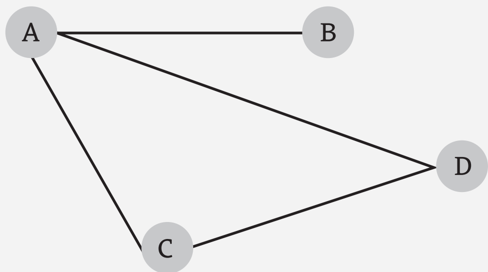
Büyük Çizgeler Daha Küçüklerinin Kopyalarıyla Oluşturulabilir mi?

Dr. Tuncay BAYDEMİR [*TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

Çizge teorisi (graph theory), çizgeleri (grafları) inceleyen matematik dalı. Çizge, temel olarak düğümler (vertex, node) ve bu düğümleri birbirine bağlayan bağlantılardan (edge) oluşan bir ağ yapısından oluşuyor. Gerçek bir problemi tanımlama, modelleme ve çözme konularında oldukça önemli kolaylıklar sağlayan teori, bu nedenle çoğu bilim dalı ve teknoloji alanında yaygın olarak kullanılıyor.

Çizge teorisi temelde küme teorisine dayanıyor. Herhangi bir çizge, düğümler ve bağlantılar kümesi olarak ifade edilebiliyor. Yani bir çizge küme şeklinde gösterildiğinde önce düğümler kümesi ardından da bu düğümlerle bağlantıları belirtiliyor. Matematiksel bir ifadeyle G=(V, E) şeklindeki gösterimde V düğüm kümesini, E ise bağlantı kümesini temsil ediyor ve çizge bu şekilde tanımlanabiliyor.

Örneğin; 4 düğüm ve 4 bağlantıdan oluşan çizge,



G= ({A,B,C,D}, {(A,B), (A,C), (C,D) , (A,D)}) şeklinde ifade ediliyor.

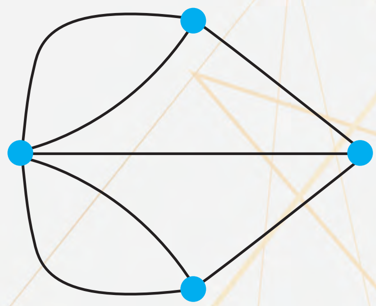
Yol ise geçilen düğümlerin sırasıyla yazılmasıyla ifade ediliyor. Örneğin yukarıdaki çizgede A düğümünden başlayarak önce D, sonra C düğümüne gidiliyorsa bu yol {A, D, C} olarak gösteriliyor. Döngü ise bir düğümden başlayarak yine aynı düğümde biten yol olarak tanımlanıyor.

Günlük hayatta pek çok şeyi çizgelerle tanımlamak ve modellemek mümkün. Birden fazla varlık varsa bunlar arasındaki ilişki rahatlıkla çizgeler kullanılarak ifade edilebiliyor. Bilgisayar mühendisliği ve bilgisayar bilimleri, sosyal ağlar, bilimsel çalışmalar ve bilimsel çalışmalara olan katkılar, kurumlar arası ilişkiler, ürün ve hammadde tedarik ağları, moleküler yapılar, mobil ağlar, ilaç karakterizasyonu, veri organizasyonu, bioenformatik sistemler, bulaşıcı hastalıklar, internet servis sağlayıcıları, hava, kara ve deniz ulaşım ağları, elektrik ve elektronik devreler, bilgisayar oyunları ve yapay sinir ağları gibi sayısız alanda çizge teorisi kullanılarak problemler hızlı ve düzgün bir şekilde tanımlanıp çözüme kavuşturulabiliyor.

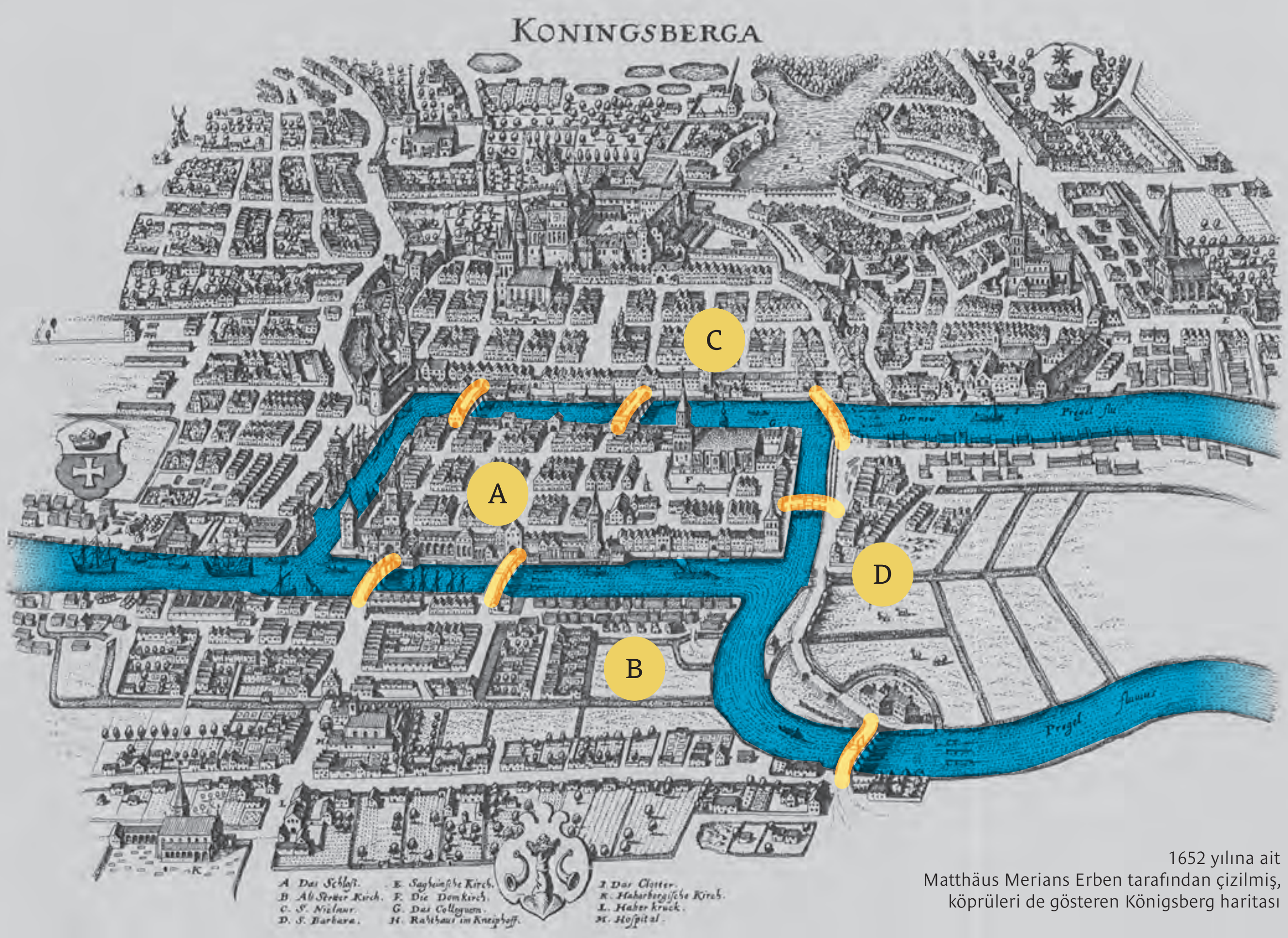
Königsberg Köprüsü Probleminden Teori Doğuyor

Çizge teorisinin temellerinin tüm zamanların önde gelen matematikçileri arasında gösterilen İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler tarafından atıldığı kabul ediliyor. 1736 yılında yayımlanan "Königsberg'in Yedi Köprüsü" makalesindeki tarihi öneme sahip problemin çözümü ile birlikte çizge teorisi de ortaya çıkmış oldu.

O dönemde Königsberg kentinde Pregel Nehri'nin kolları olan Eski Pregel ve Yeni Pregel nehirleri bölgeyi dört parçaya ayırıyor ve nehirler üzerinde de bu bölgeleri birbirine bağlayan 7 adet köprü bulunuyordu. Burada çözüm aranılan problem ise bütün köprülerden bir ve yalnız bir defa geçilerek bölgeyi gezmek mümkün olabilir miydi? Bu problem çoğu kişiye tanıdık gelebilir. Ellerimizi kaldırmadan ve her bir bağlantıdan bir defa geçecek şekilde karmaşık gözüken bir şekli çizmenin mümkün olup olmadığını birçoğunuz denemiş olmalısınız.

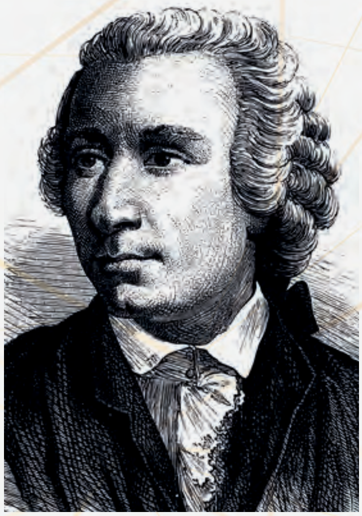


Königsberg köprü probleminin çizge olarak ifade edilmiş hâli. Her bir bağlantı farklı köprüyü, her bir düğüm ise farklı karasal bölgeyi ifade ediyor.



1652 yılına ait
Matthäus Merians Erben tarafından çizilmiş,
köprüleri de gösteren Königsberg haritası

18. yüzyılda İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, yedi köprünün her birinden tam olarak bir kez geçecek bir yolun var olup olmadığı sorusuyla ilgilendi ve bunun mümkün olmadığını gösterdiği çalışmasıyla çizge teorisinin temelini attı.



Leonhard Euler (1707-1783)

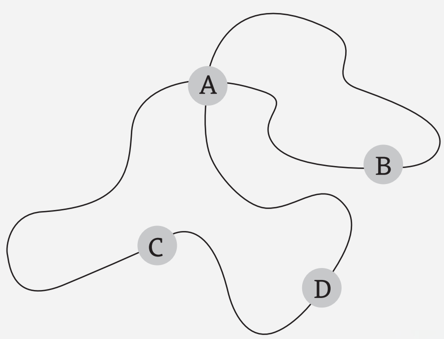
Pregel Nehri etrafına kurulu C ve B karaları ile A ve D adacıklarının etrafındaki 7 adet köprünün her birinden yalnızca bir defa geçilen bir yolun olup olmadığı problemi üzerine düşünen Euler, şayet bir düğüme bir bağlantı ile geliniyorsa bu düğümü terk etmek için farklı bir yola gerek olduğunu söylüyordu. Buradan yola çıkarak her bir düğüme gelen ve giden bağlantı sayısını hesapladı ve buna düğüm derecesi adını verdi. Eğer bir düğümün derecesi tek sayı ise bu düğüm ya başlangıç ya da bitiş noktası olmalıydı.

Euler bu problemin çözümü ile uğraşırken "Euler yolu" teorisini ortaya koydu ve yayımladığı çalışmada böyle bir gezintinin gerçekleştirilemeyeceğini gösterdi. Euler problemin ispatı için güzergâhı düğümler ve bağlantılardan oluşacak şekilde modelledi. Eğer bir yönsüz (yönden bağımsız) çizgede bütün bağlantıları dolaşan bir yol bulunabiliyorsa bu yola "Euler yolu" deniyor. Eğer bu yol başladığı düğümde son buluyor ve tam bir döngü elde ediliyorsa da "Euler döngüsü" olarak adlandırılıyor. Buna göre eğer ki çizgedeki tüm düğümlerin derecesi (o düğüme gelen ve giden tüm bağlantıların toplamı) çift sayı ise sadece bu durumda Euler döngüsünün varlığından söz edilebiliyor, yani başladığınız düğümden hareketle tüm bağlantılardan bir kez geçerek yeniden başlangıç düğümüne dönebilirsiniz.

Çizgede tek sayılı düğüm dereceleri varsa bunlardan en fazla iki tane olması durumunda bu sefer Euler yolu bulmak mümkün olabiliyor. Yani tek sayılı düğüm derecesine sahip noktadan başlayarak diğer tek sayılı düğüm derecesine sahip noktada bitirilecek şekilde tüm bağlantılardan geçilebilir. Diğer tüm olasılıklarda Euler yolu veya döngüsünün varlığı mümkün olamıyor.

Peki, bir çizgede birden fazla Euler döngüsü bulunabilir mi? 1941 yılında dört matematikçi tarafından bulunan teorem bu araştırmacıların isimlerinin baş harfleriyle adlandırılıyor. BEST teoremine göre, bir çizgedeki Euler döngülerinin sayısını bulmak için, bu çizgedeki tüm düğümlerin derecelerinin bir eksiğinin faktöriyelleri hesaplanıyor ve sonuçlar birbirleriyle çarpılıyor. Örneğin A, B, C, D düğümlerinden oluşan bir çizgede düğüm dereceleri sırasıyla 4, 4, 2, 2 olsun. Tüm düğüm dereceleri çift sayıda olduğu için Euler döngüsünün olduğundan söz edebiliriz. Düğüm derecelerinden bir eksilttiğimizde 3, 3, 1, 1 sayılarını elde ederiz. Faktöriyellerini hesapladığımızda da (3! (3x2x1), 3! (3x2x1), 1!, 1!) nihayetinde 6, 6, 1, 1 sayılarını elde ederiz. Bu sayıları birbiriyle çarptığımızdaysa çizgede 36 farklı Euler döngüsü olduğunu söyleyebiliriz.

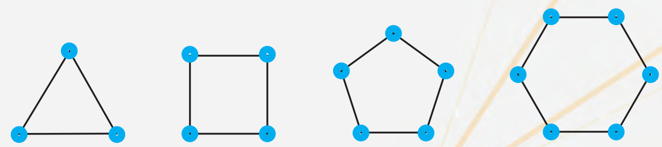
Daha basit olan bir çizgeyi de siz hazırlayıp kaç farklı Euler döngüsü olduğunu gösterebilirsiniz. Bunun için yine A, B, C, D, olarak isimlendirilen 4 düğümden oluşan ve düğüm dereceleri sırasıyla 4, 2, 2, 2 olan bir çizge çizin ve Euler döngülerini bulmaya çalışın! Kaç tane böyle döngü var? Siz kaç tanesini bulabildiniz?



Bazı Özel Çizgeler

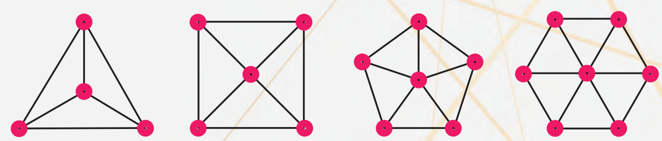
Çizgelerde bir düğümden başlayıp aynı düğümde biten ve aynı düğümden iki kez geçmeyen yollara döngü adı veriliyor. Bir çizgenin içerisinde herhangi bir döngü olup olmadığının bulunması da matematikte önemli problemlerden biri. Bir çizgedeki bağlantı sayısı, düğüm sayısından büyük ya da bu sayıya eşitse o çizgede en az bir döngü bulunuyor.

Düğüm sayısı üç veya daha fazla olan ve tek bir döngüden oluşan çizgelere "döngü çizge" adı veriliyor. Döngü çizgeler C_n şeklinde gösteriliyor ve n düğüm ve hat sayısını ifade ediyor. Döngü çizgelerdeki tüm düğümlerin derecesi birbirine eşit ve 2'dir.



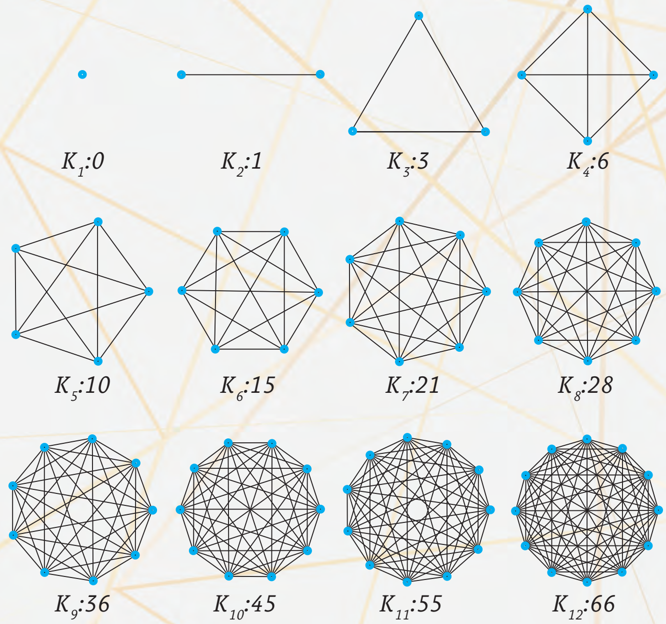
C_3 C_4 C_5 C_6

Tekerlek çizgelerse döngü çizgelerin tam ortasına yeni bir düğüm eklenip bu düğümün diğer tüm düğümlere bağlanmasıyla elde ediliyor. Tekerlek çizgeler W_n şeklinde gösteriliyor ve bu çizgeler n düğüm ve 2(n-1) bağlantı içeriyor.



W_4 W_5 W_6 W_7

Eğer bir basit çizgede her bir düğüm diğer tüm düğümlerle bir bağlantıya sahipse bu durumda "tamamlanmış çizge" varlığından söz edebiliriz. Tamamlanmış çizgeler K_n şeklinde gösteriliyor ve n düğüm sayısını ifade ediyor.



Tamamlanmış çizgelerde tüm düğümlerin derecesi birbiriyle eşit olup toplam düğüm sayısının bir eksiğine karşılık geliyor. Toplam bağlantı sayısı ise (n (n-1))/2 formülüyle bulunabiliyor.

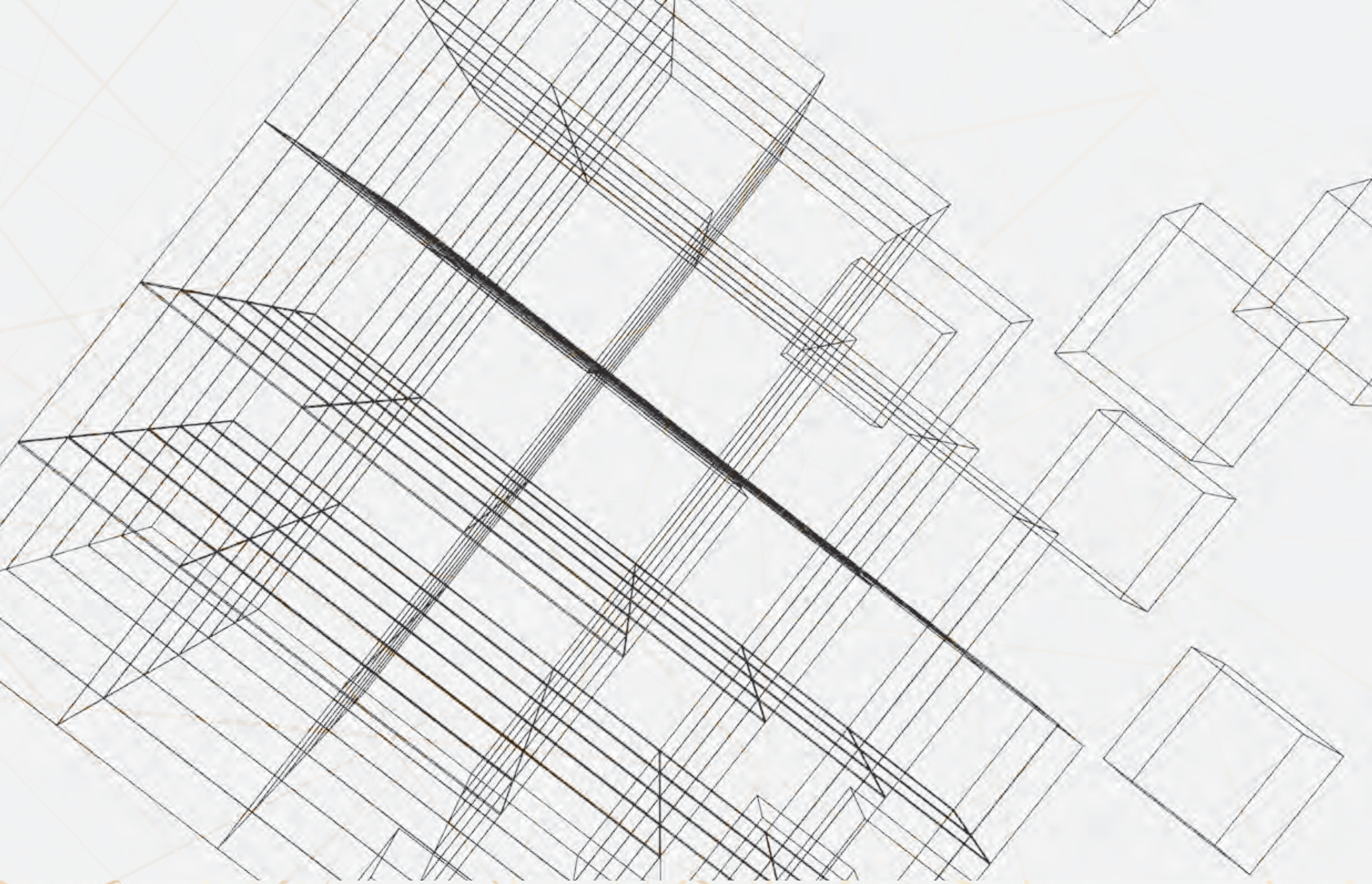
Aynı Parçalardan Tamamlanmış Çizge Elde Etmek Mümkün mü?

Çizgelerde tipik bir alt gruplara ayırma sorusu, bir G çizgesinin başka bir çizge grubu kopyalarına bölümlenip bölümlenemeyeceğini sorgular. Bu konudaki en eski ve en yaygın bilinen, tahmine dayalı varsayımlardan birisi de 1963 yılında çizge teorisine büyük katkılarda bulunmuş Alman matematikçi Gerhard Ringel'in tamamlanmış bir çizgenin birbirini tekrar eden ve döngü içermeyen parçalara bölünebilmesinin mümkün olduğu üzerine varsayımıdır. Bu varsayıma göre K_{2n+1} tamamlanmış çizgesi n sayıda düğüme sahip parçaların 2n+1 kere tekrarlanmasıyla oluşturulabilir.


Gerhard Ringel (1919-2008)

Matematik bilimine yaptığı büyük katkıların yanında aynı zamanda ünlü bir entomolog (böcek bilimci) olan Ringel, kelebek toplama ve yetiştirme üzerine çalışmalar da yaptı. Ölümünden bir süre önce 5.000'den fazla örnek içeren oldukça seçkin kelebek koleksiyonunu California Üniversitesi Santa Cruz Doğa Tarihi Koleksiyonları Müzesine bağışladı.

Matematikçiler tamamlanmış çizgelerin büyük ağaçlara (içinde döngü barındırmayan çizgelere) bölünebilmesinin mümkün olup olmadığını uzun yıllardır araştırıyorlar. Burada büyük ağaç olarak ifade edilmek istenen, ağacın boyutunun çizge boyutu ile kıyaslanabilir derecede olduğudur. Konuyla ilgili varsayım ve çözüm bekleyen soru 1963 yılında Ringel tarafından ortaya atıldı ve varsayıma göre tamamlanmış K_{2n+1} çizgesi n bağlantıya sahip herhangi bir ağacın kopyalarına ayrıştırılabilirdi. Çizge çözümlemeleriyle ilgili en eski açık varsayımlardan birisi olarak bilinen bu konu üzerinde çeşitli şekillerde ağaçlar kullanılarak farklı çözümler yayımlandı ve bazı kısmi sonuçlar da elde edildi.



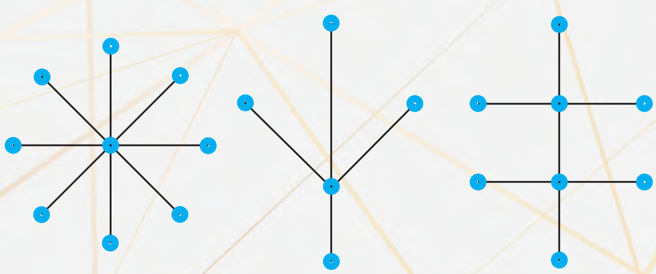
Ringel varsayımına göre, belirli türden karmaşık grafikler belirli daha küçük grafiklerin herhangi bir kopyasının tekrarlanmasıyla elde edilebilir. Bunu kafanızda daha iyi canlandırabilmek için bir zemini aynı seramik karolarla tamamen kapladığınızı düşünebilirsiniz. Burada ilk karoyu nereye yerleştirdiğiniz grafik teorisinde olduğu gibi oldukça önemlidir. Yapılan bu yeni çalışma oldukça kritik bu aşamayı sezgisel ve şaşırtıcı bir şekilde ele alıyor.

Kanıtlar Ortaya Konuyor

Yakın zamanda R. Montgomery, A. Pokrovskiy ve B. Sudakov adlı üç matematikçi tarafından yaklaşık 60 yıllık bu problemin çözüldüğü bildirildi. Sonuçlara göre, karmaşık çizgelerin nokta ve çizgi yapıları aslında birbirinin aynısı olan daha küçük parçaların birleşiminden elde edilebiliyor. Bu oldukça eski varsayımın çözüm bulması matematik dünyasında oldukça büyük heyecan uyandırdı.

Matematikçiler karmaşık çizgelerdeki düğümler ve bağlantıların nasıl bir araya geldiklerini uzun yıllardan beri araştırıyorlardı. Daha küçük ve daha basit şekillerin daha karmaşıklarının yapı taşları olup olamayacağı konusu ise bu alanda çözülmesi beklenen önemli sorulardan biriydi.

Gerhard Ringel bu türden, basit görünen ama oldukça kapsamlı bir soru ortaya koydu. Öncelikle 3'ten büyük olan tek sayıda düğümle başlayın. Her bir düğüm diğer tüm düğümlere bağlanacak şekilde aralarına bağlantılar (kenarlar) çizin. Sonuçta tamamlanmış bir çizge elde edersiniz. Bu çizgeyi elde etmek için aralarında çizgi ile bağlanmış ve kapalı olmayan birimler düşünün. Bu birimler görüntüleri itibariyle ağaç olarak adlandırılıyor. Yani tüm bir grafik bu ağaçların kendini tekrar etmesiyle elde edilebilir mi?



Farklı ağaç örnekleri

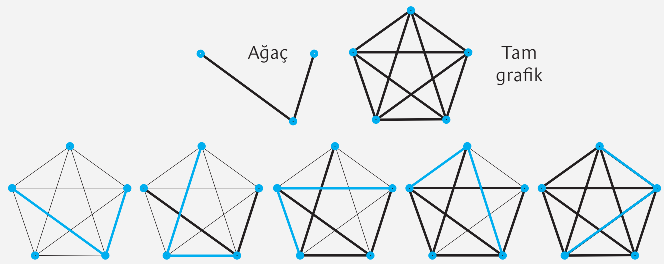
Herhangi bir döngü içermeyen ve bağlantı sayısı düğüm sayısının bir eksiği olan çizgelere “ağaç” çizge deniyor. Ringel’in sorusu tam olarak tamamlanmış çizgeler ve ağaçlar arasındaki ilişkiye dayanıyor. Öncelikle 2n+1 yani tek sayıda düğümü olan tamamlanmış bir çizge hayal edin. Daha sonra n+1 sayıda düğüme sahip olası bütün ağaç türlerini düşünün. Bu da elinizde pek çok olasılık var anlamına geliyor ve işler oldukça karmaşıklaşıyor.

Şimdi yapılacak şey ise bu ağaçlardan seçtiğiniz herhangi birisini çizgedeki köşelere ve kenarlara denk gelecek şekilde yerleştirmek. Sonra aynı ağacın başka bir kopyasını çizgenin farklı noktalarına yerleştirerek tüm çizgeyi çakışma olmayacak şekilde kaplamak. Ringel doğru yerden başlandığı takdirde ağaçların çizgenin tamamına kusursuz şekilde döşenebileceğini öngörüyordu. Ringel’in varsayımı düğüm sayısının ne kadar büyük olduğuna bakmaksızın tek sayıda düğüm içeren tüm tamamlanmış çizgeleri kapsıyor. Çizge büyüdükçe uygulanabilecek farklı ağaçların sayısı da astronomik rakamlara ulaşıyor. Peki bu ağaçların her biri kullanılarak tüm çizge nasıl mükemmel bir şekilde elde edilebilir?

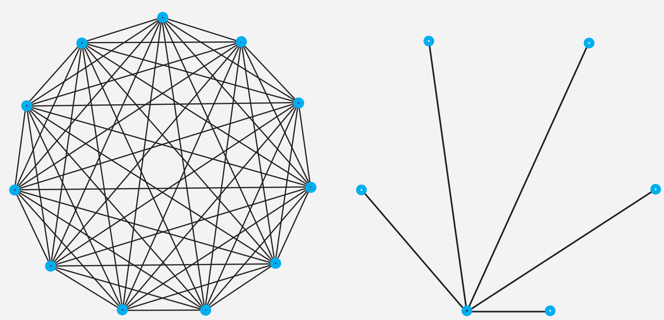
Ringel’in varsayımının doğru olduğunu düşünmek mümkün. Öncelikle bir 2n+1 düğümlü çizgenin kenar sayısı n+1 düğümlü ağacın kenar sayısına tam olarak bölünebiliyor. Bu nedenle varsayımın geçerli olabileceğini düşünen matematikçiler konudaki araştırmalarına uzun yıllar ara vermeden devam ettiler.

Yerleştir ve Döndür

En basit şekilli ağaçlardan biri yıldız şeklinde olanlardır. Bu ağaçlar merkezi bir düğümden çıkan dallar şeklindedir. Matematikçiler bu tür ağaçlarla yapılan çalışmalarda n+1 düğümlü ağaçların 2n+1 düğümlü grafikleri kusursuz bir şekilde kaplayabildiğini gösterdiler. Bu da matematikçilere ilerlemeleri için gerekli motivasyonu sağlamak için yeterliydi.



Şimdi de 11 düğümlü bir örnek düşünün. Bu düğümleri dairesel bir şekilde eşit aralıklarla yerleştirin ve her bir düğümü diğer düğümlerle birleştirerek bir çizge elde edin. Şimdi bu çizge için 6 düğümlü yıldız şeklinde bir ağaç türü düşünün. Ardından bu ağacı köşeler birbiriyle çakışacak şekilde yerleştirin. Sonra ağacı bir sonraki köşeye hareket ettirin. Yıldız şeklindeki ağacı her seferinde bir birim döndürmeye devam edin. Başladığınız yere geri geldiğinizde Ringel’in öngördüğü gibi ağaçlardan hiçbiri üst üste çakışmadan çizgenin tamamen kapladığını görebilirsiniz.



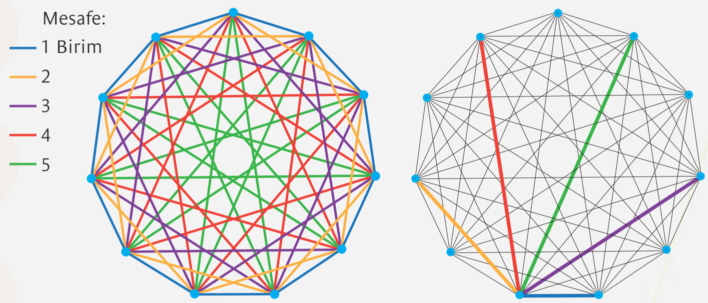
11 düğümlü tamamlanmış çizge ve onu oluşturmak için kullanılan 6 düğümlü yıldız şeklinde ağaç.

Ağaç bir yıldız şeklindeyse varsayımın gerçeklik payı olabileceğini gören bilim insanları daha karmaşık yapıdaki ağaçların da işe yarayıp yaramayacağını sorgulamaya başladılar. Öyle ki Ringel varsayımını yayımladıktan kısa süre sonra Slovak-Kanadalı matematikçi Anton Kotzig 2n+1 düğümlü her tamamlanmış çizgenin n+1 düğümlü herhangi bir ağaç tarafından döşenebileceğini öne sürdü. Başta bu fikir hayali gibi görünebilir. Rotasyonel işlemin işe yaraması için elbette ağaçların doğru bir şekilde yerleştirilmesi gerekiyor. Yıldız şeklindeki ağaçlarda doğru yerleştirme yapmak oldukça kolay ancak farklı şekil ve uzunluklarda birçok dalı olan ağaçları nasıl doğru şekilde yerleştireceğinizi hayal etmek oldukça zor bir hâl alabilir.

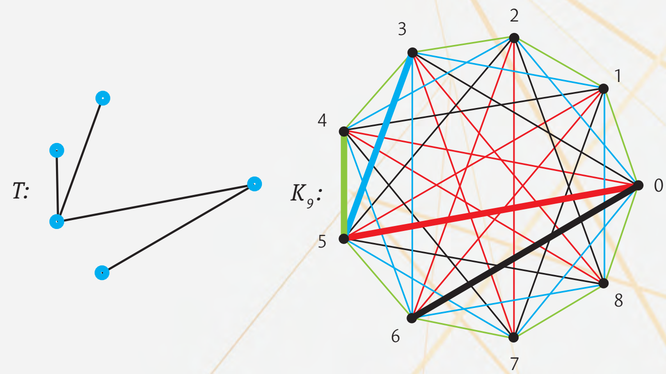
Renk Kodları Kullanmak

Matematikçiler Ringel'in varsayımını Kotzig'in döndürme yöntemi ile çözmek için kolay bir yöntem uyguladılar. Farklı renklerin kod olarak kullanılması ile işlem oldukça kolay uygulanabilirdi.

Renk kodlaması karmaşık şeyleri düzenlemek ve farklılığı algılamak için etkili bir yöntem. Aynı zamanda çizgeye ilk ağacı yerleştirmenize ve işlemi sürdürmenize de kolaylıklar sağlıyor. Bir daire üzerine yerleştirilen 11 düğümlü tamamlanmış bir çizgeyi yeniden düşünelim. Burada dikkat edilmesi gereken nokta bağlantıların nasıl kodlanacağıdır. Bu mesafeyi bir düğümden diğerine gitmeniz için gereken çember etrafındaki kenar sayısı olarak tanımlayabiliriz. Çemberin içinden herhangi bir kısa yol olmadığını düşünüyoruz. Böylece bağlantılar 1 ile 5 arasında renk kodlarına sahip olacak. Farklı renk kodlamasına sahip bağlantılar 11 köşeli çizgeye uygun olarak yerleştirildiğinde aşağıdaki şekil elde edilecektir.



Ringel ve Kotzig varsayımlarını öne sürdükten kısa süre sonra Kotzig çizgede kullanılan renklendirme modelinin ağacın ve yerleştirmesinin nasıl yapılması gerektiğine yönelik bir kılavuz olarak kullanılabileceğini fark etti. Böylece ağaç aynı renkteki bağlantıları kaplayacak ve hiçbir şekilde aynı renkli bölgeyi iki kez kaplamayacaktı. Matematikçiler bu yerleşimi "ağacın gökkuşağı kopyası" diye adlandırıyorlar. Renklendirme işleminde n adet farklı renk ve n+1 adet düğümden oluşan en az bir olası gökkuşağı kopyası bulunabilir. 1960'ların sonlarına doğru matematikçiler ağacın gökkuşağı kopyasının başlangıç noktasını bulmayı sağladığını ve bu noktadan başlayarak ağacı döndürmek yoluyla şekli kaplayabileceklerini anladılar.



K_9 çizgesi ve 4 bağlantılı bir T ağacının gökkuşağı kopyası. Ağacın düzgün bir şekilde döndürülmesiyle tamamlanmış çizge elde edilebiliyor.

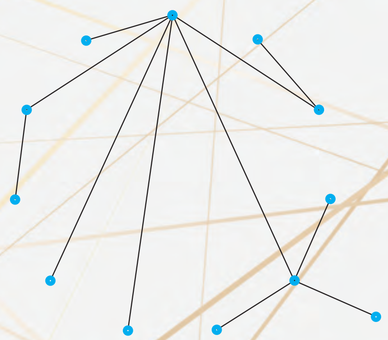
Bundan sonra yapılacak şey 2n+1 sayıda düğüm içeren tamamlanmış çizgenin n+1 düğümden oluşan tüm olası ağaçların gökkuşağı kopyaları ile kaplanabileceğini kanıtlamaktı. Uğraşlar yaklaşık 40 yıl sürdü ancak Sudakov ve arkadaşları sonunda gerekli kanıta ulaştılar ve bu önermenin büyük n değerleri için de geçerli olduğunu bildirdiler.

Mükemmel Yerleşim

11 düğümlü tamamlanmış bir grafik ve 6 düğümlü bir ağacı tekrar düşünün. Grafiğin tamamını 5 farklı renkle ifade edebilirsiniz. Elinizdeki ağacın da 5 farklı renkte bağlantısı olacaktır. Sizden istenen şey çizgenin içindeki ağacın gökkuşağı kopyasını bulmak.

Ağacın kenarlarını çizgeye teker teker yerleştirin. İlk bağlantıyı yerleştirmek oldukça kolay görünebilir. Ancak diğer bağlantıları yerleştirmek ve ağacı elde etmek o kadar da kolay olmayacaktır. Basit şekilli ağaçların gökkuşağı kopyalarını bulmak oldukça kolay olabilir. Ancak karmaşık ağaç yapılarında bu işlem bir hayli zor. Doğru yerleştirmesi en zor ağaçlardan birisi tek bir düğümde birleşen ve düzensiz bir şekle sahip olanlardır. Yerleştirme kolaylığı bu gibi karmaşık ağaç şekilleri söz konusu olduğunda ortadan kalkıyor.

İşin zorluğunu daha iyi anlamak için şimdi de 11 bağlantısı olan bir ağaç düşünelim. Bu bağlantılardan 6 tanesi merkezi bir tepe noktasında birleşsin. Geri kalan bağlantılar da çoğunlukla bir noktadan bağlansın. Burada yerleştirilmesi en zor nokta altı bağlantı içeren tepe noktası. Matematikçiler bu bölümü ağacın geri kalanından ayırdılar ve ilk önce onu yerleştirdiler. Bu işlem basit olarak modüler bir mobilyayı parçalarına ayırıp yeniden tekrar birleştirmek gibi düşünülebilir. Sonra yıldıza benzeyen şeklin çizgenin içerisine yerleştirilebileceği olası tüm bölgeler tespit edildi ve rastgele bir tanesi başlangıç noktası olarak seçildi. Böylece çizgenin geri kalan kısmının da rastgele olması sağlandı. Bu adımdan sonra yapılması gereken ağacın geri kalan kısmının kalan bölgelere doğru bir şekilde yerleştirilmesini sağlamaktı.



11 bağlantıya sahip karmaşık bir ağaç

Kullandıkları yöntem ve çalışmaları sayesinde klasik metotlarla çözülemeyen oldukça eski bir problemi çözen araştırmacılar, bir ağacın en zor kısımları yerleştirildiğinde geriye kalan rastgele kısımları boştaki bölgelere düzgün bir şekilde yerleştirmenin ve ağacın gökkuşağı kopyasının bu şekilde gösterilebileceğinin her zaman bir yolu olduğunu gösterdi. Sonuçlar 2n+1 düğümlü her tamamlanmış grafikte n+1 düğümlü her ağacın gökkuşağı kopyasını bulmanın kesin bir yolunu henüz tam olarak göstermiyor ama bir gökkuşağı kopyasının bulunduğunu kanıtlıyor ve benzer çözülmemiş problemler için de yeni çözüm yolları sunuyor. ■

Kaynaklar

Montgomery, R., Pokrovskiy, A., Sudakov, B., “A proof of Ringel’s Conjecture”, arXiv:2001.02665, 2020.

Seker, S.E., “Çizge Teorisi (Graph Theory)”, YBS Ansiklopedi, Cilt 2, Sayı 2, s. 17-29, 2005.

https://www.quantamagazine.org/mathematicians-prove-ringels-graph-theory-conjecture-20200219/

Heinold, B., “A Simple Introduction to Graph Theory”, https://www.brianheinold.net/graph_theory/A_Simple_Introduction_to_Graph_Theory_Heinold.pdf, 2020.

https://www.youtube.com/watch?v=paMcKZlcv78

https://www.youtube.com/watch?v=PYAxAUUKZ84&list=PLcNWqzWzYG2vmvMLwSpza7IyV0oqoGLjg

https://www.youtube.com/watch?v=AwsMTEl79wI

https://www.britannica.com/topic/graph-theory

https://www.youtube.com/watch?v=kDgVBk7BiEs