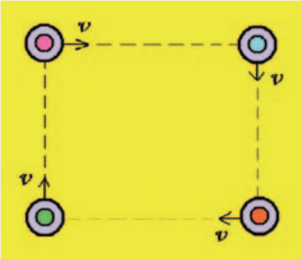
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Dört Meksikalı Problemi



Önceki sayılarımızdan birinde konuğumuz olan Meksikalı dostlarımızı bu soruyla köşemize tekrar konuk ediyoruz. Şekilde sadece şapkalarını görebildiğimiz Meksikalıların başlangıç konumlarını gösteren üstten bir görüntü yer alıyor. Dostlarımızdan her biri saat yönündeki komşusuna dönmüş durumda bekliyor. Hepsi aynı anda ve sabit v hızıyla saat yönündeki komşusunun doğrultusunda yürümeye başlıyor. Bu durumda ilk başta kare olan aralarındaki şekil nasıl değişir? Peki ne zaman bu dört arkadaş karşılaşırlar?

En Büyüğün En Küçük Değeri

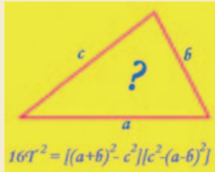
Toplamları 1 olan ve hiçbiri negatif bir değer almayan 7 tane a, b, c, d, e, f, g reel sayımız var. Şimdi bu reel sayıların oluşturduğu a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g toplamlarının içinden çıkacak en büyük değere M diyelim. Yedi reel sayıyı öyle ayarlayın ki toplamların en büyük değerini veren M sayısı en küçük değerini alsın. Acaba bu en küçük M değeri kaçtır?

Logaritmik Eşitsizlik

Logaritma konusunda küçük bir alıştırma yapmak isteyen okuyucularımız için bu sorumuz. Sorunun sizden istediği aslında çok basit: İstenilen a>1 olması koşuluyla $(\log_a 10 + \log_{10} a) \geq 2$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermeniz.

Heron Teoremi

Üçgenler için üretilmiş o kadar çok formül var ki insan şaşırmadan edemiyor. İşte karşımızda bunlardan "Heron Teoremi" adıyla anılan formül: $16T^2 = [(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$. Formülde a,b,c harfleri üçgenin kenarlarını, T ise üçgenin alanını temsil ediyor. Bu formülün her üçgen için geçerli olduğunu gösterebilir misiniz?

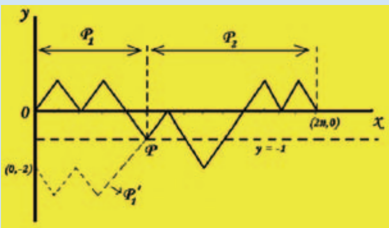


Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Koordinat Ekseninde Olasılık-2

"Matematiğin Şaşırtan Yüzü" bölümünü takip eden okuyucular geçen ayki yazımızda Erdös ve Kaplansky'nin ilginç problemini tanıttığımızı ve çözümü kolaylaştırmak için soruyu koordinat eksenine taşıdığımızı hatırlayacaklardır. Bu küçük hatırlatmadan sonra şimdi gelin koordinat ekseni kullanarak soruyu nasıl çözebileceğimizi hep birlikte görelim.

Çözüm için, koordinat ekseninde orijinden başlayan ve +1 ile –1'lerin sayısının eşit olmasından ötürü her zaman (2n,0) noktasında biten grafiğimizin 4. çeyrek olarak adlandırılan bölgeye (x= +, y= - olan bölge) girmemesini istiyoruz. O halde bulmamız gereken, orijinden (2n,0) noktasına giden tüm olası grafiklerin kaç tanesinin bu şartı sağladığıdır. Aradığımız değer = C(2n ; n) – (x ekseninin altına en az bir noktada inen dizi sayısı). Bu durumda sonuca ulaşmak için y'nin pozitif olduğu bölgeyi terkeden dizi sayısını bulmamız yeterli olacak.

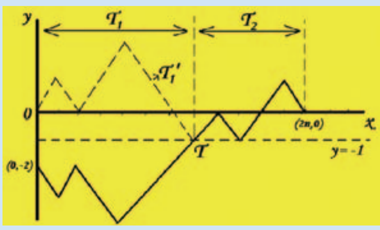


Grafiğin x ekseninin altına inmesinin aslında y= -1 doğrusuna temas etmesi anlamına da geldiğini göz önünde bulundurarak ilk grafiği inceleyelim. y = -1 doğrusu ile ilk temas P noktasında oluyor. Şimdi bu noktaya kadarki kısmın y= -1 doğrusu ile simetriğini(P1') alıp P2 ile birleştirelim. Elde ettiğimiz (0,-2) noktasında başlayıp (2n,0) noktasında biten yepyeni bir dizi oldu.

Bu durumun tam tersini ikinci grafikte göreceğiz. Bu sefer grafik (0,-2) noktasında başlıyor ve (2n,0) noktasında bitiyor. Burada da y= –1 doğrusu ile ilk temasın olduğu T noktasına kadarki kısmın simetriğini(T1') alıp T2 ile birleştireceğiz. Elde edilen yeni grafiğin, bulmaya çalıştığımız x ekseninin altına en az bir noktada inen grafiklerden biri olduğuna dikkatinizi çekmek istiyorum.

İki grafiği de inceledikten sonra şöyle bir sonuca varabiliriz: "eğer ben (0,-2) noktasında başlayan ve (2n,0) noktasında biten olası tüm grafiklerin sayısı bulabilirsem, birebir eşlenme özelliğinden ötürü orijinde başlayıp (2n,0) noktasında biten ve x ekseninin altına en az bir noktada inen olası tüm grafiklerin sayısını da bulmuş oluyorum." Bu yargı işimizi çok kolaylaştırdı. Bahsettiğimiz grafik (n+1) tane +1 ve (n-1) tane –1 kullanılarak elde edilebilir. Bunların sayısı da kombinasyon ile C(2n ; n-1) veya C(2n ; n+1) olur ki iki değer zaten birbirine eşittir. Artık yapmamız gereken tek bir işlem kaldı: (kısmi toplamı asla negatif olmayan dizi sayısı) = (tüm dizilerin sayısı) – (x ekseninin altına en az bir noktada inen dizi sayısı) = C(2n ; n) – C(2n ; n-1)

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

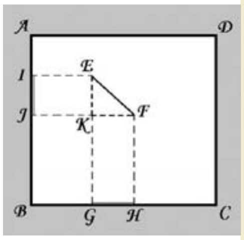


Sonucu olasılık olarak değerlendirirsek tüm dizi sayısına oranlama sonucunda 1/(n+1) sonucunu elde ederiz. Kombinasyon hesaplamalarında çok karşılaşılan ve "Katalan sayılar" adı verilen cn = {1, 2, 5, 14, 42, 132, 429,...} sayı dizisine başarıyla ulaşarak bu ayki yazımız tamamlamış olduk.

Geçen Ayın Çözümleri

Eğrisiyle Doğrusuyla

EF, sorudaki P eğrisinin herhangi bir parçası ve GH ile IJ de bu parçanın AB ile BC kenarları üzerindeki izdüşümleri olsun. Üçgende kenar eşitsizliği prensibini kullanarak GH + IJ ≥ EF eşitsizliğini yazabiliriz. Şimdi tek bir segment için yazdığımız eşitsizliği P eğrisini oluşturan her bir segmenti de ekleyerek genelleyelim. Bu durumda ΣGH + ΣIJ ≥ P'nin uzunluğu > 2n eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğe göre ΣGH veya ΣIJ toplamlarından biri n'den büyük olmalı. Mesela ΣGH > n olsun. BC kenarının 1 birim olduğunu biliyoruz. O halde BC kenarı üzerinde öyle bir X noktası bulabiliriz ki bu noktadan BC'ye dik çizilecek bir doğru P eğrisini en az n+1 noktada kessin.



Aranan İspat

Öncelikle soruda verilen eşitliğin sol tarafını şöyle düzenleyelim: 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/2n – 2(1/2 + 1/4 + 1/6 + ... + 1/2n) = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/2n – (1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n). Dikkat ederseniz parantez içindeki eksili terimler tüm eşitlikteki bazı terimlerin sadeleşmesine uygun biçimdedir. Bu sadeleştirmeyi yaptıktan sonra elimizde soruda verilen eşitliğin sağ tarafı kalır: 1/(n+1) + 1/(n+2) + ... + 1/2n

Sayılardan Bulmaca

Soruda bizden istenen denklemin sonucuna x diyelim:

$$\log_2 [\log_{9^{1/2^x}} 9] = x$$

İlk logaritmayı ortadan kaldırmak için eşitliğin her iki tarafının 2 tabanında üssünü alalım. Böylelikle eşitlik şu biçime dönüşür:

$$[\log_{9^{1/2^x}} 9] = 2^x$$

Şimdi sıra diğer logaritmadan da kurtulmaya geldi. Bu sefer her iki tarafın $9^{1/2^x}$ tabanında üssünü alacağız. Yaptığımız son işlemle $9 = \left(9^{1/2^x}\right)^{2^x}$ eşitliğine ulaşmış olduk. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için x = n olmalıdır. O halde aradığımız x değeri n'e eşittir.

Hayali Sıra

Geçen ay "Matematiğin Şaşırtan Yüzü" bölümünde anlatmaya başladığımız problemin ilginç öyküsünü bu ayki yazımızla tamamladık. O yüzden burada sorunun çözümünden çok cevabını vereceğiz. Çözümü ayrıntısıyla "Matematiğin Şaşırtan Yüzü" bölümünde bulabilirsiniz. Bilet sırasının diziliminde toplam kombinasyon C(2n ; n) tanedir ve bunlardan C(2n ; n) – C(2n ; n-1) tanesi istediğimiz koşulu sağlar. O halde olasılığı bulmak için bir oranlama yaptığımızda sonuç olarak 1/(n+1) değerini elde ederiz.