Geçen Ayın Çözümleri

Zeka Oyunları

Gödel'in Şeytani Bilmeceleri-A

B'nin teklifini tercih ederdiniz; çünkü bu teklif 10 dolardan fazlasını garanti etmektedir. A'nın teklifinde 10 dolardan fazlasını garantileyen bir hüküm yoktur.

Gödel'in Şeytani Bilmeceleri-B

Bana şöyle dersiniz: "Siz bana Ödül 2'yi vermeyeceksiniz." Eğer bu cümle yanlışsa, bunun aksi doğrudur, yani size Ödül 2'yi vermem gerekir. Fakat yanlış bir cümle için size hiç bir ödül vermeyeceğimi söylemiştim. O halde cümle doğru olmalıdır, yani gerçekten Ödül 2'yi almamalısınız. Doğru cümleye 2 ödülden birini vereceğimi söylediğinden, Ödül 2'yi vermeyeceğime göre size Ödül 1'i vermek zorunda kalırım.

a) "Ya iki ödülü de alacağım, ya da hiç ödül almayacağım." Cümleniz yanlışsa tek ödül almanız gerekir → Yanlış cümle için ödül alamazsınız → O halde cümleniz doğrudur → Cümleniz doğru olduğu için ödüle hak kazandınız → Ancak cümle yanlışsa ödül verilmediğinden doğru cümlenize karşılık iki ödülü de alırsınız.

b) "Ödül almayacağım" dersiniz. Eğer cümleniz doğruysa hem ödül almamanız gerekir (cümle öyle diyor); hem de doğru söylediğinize göre Ödül 2'yi almanız gerekir. Bu çelişkidir. O halde cümleniz yanlıştır ve söylediğiniz aksine ödül almanız gerekir. Yanlış cümleye Ödül 2 verilmediğinden Ödül 1'i alırsınız.

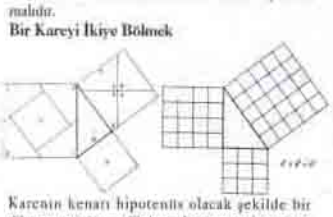
c) "Ödül 2'yi alacağım" dersiniz. Kanıtını size bırakıyorum.

d) Size şunu söylerim: "Bana ne 10 dolar, ne de 1 milyon dolar ödeyeceksiniz." Eğer cümlem doğruysa bana ne 10 dolar, ne 1 milyon dolar ödersiniz; fakat doğru olduğu için 10 dolar ödemek zorundasınızdır. Bu çelişkidir; o halde cümlem yanlıştır. Demek ki cümlemin aksi doğrudur: bana ya 10 dolar ya da 1 milyon dolar ödemelisiniz. Fakat yanlış bir cümleye 10 dolar ödeyemezsiniz. O halde bana 1 milyon dolar ödemelisiniz. Başka oynamak isteyen var mı?

Gödel'in Şeytani Bilmeceleri-C

Size "Ben B klübünün üyesi değilim" dedi. Bunu söyleyen üç kağıtçı ise zaten klüp üyesi olamaz. O zaman doğru söyledi demektir. Öyleyse şövalye olmalıdır; o halde söylediği doğrudur, yani B klübünün üyesi değildir. Şövalyeler klüp üyesi olmaya mecbur olduklarından A klübünün üyesi olmalıdır.

Bir Kareyi İkiye Bölmek



Karenin kenarı hipotenüs olacak şekilde bir üçgen çizer ve dik kenarlar üzerine birer kare kurarsınız (Pisagor teoreminin uygulanması). Sağdaki 5 x 5'lik büyük kare 4 x 4 ve 3 x 3'lük iki kareye ayrılmıştır. İki küçük kareyi uygun şekilde kesip birleştirerek büyük kareyi elde edebilirsiniz (yukarıdaki şekil).

Bertrand Russell'in Moore Paradoksu

Buna karar verilemez. Eğer yanıtı doğruysa, arada bir yalan söylüyor demektir. O zaman verdiği bu yanıt da yalan olabilir; yani "hayır" yerine "evet"i doğru kabul etmemiz gerekir; yani söylediği herşey doğrudur, o halde "hayır" deyişi de doğrudur, yani arada bir yalan söylemektedir. İşin içinden çıkılamaz, bu gibi durumlara mantık paradoksları denmektedir.

Yulaf Lapası

Yulafın tabanı dairesinde oluşturduğu çap çizgisinden geçmek üzere tabana dik bir düzlemle silindiri iki eşit yarıma ayırın. Sonra yulafın üst kenarının en yüksek noktasından silindirin tabanına paralel bir düzlem geçirin. Görecekseniz ki yulaf yarım silindirin yarısını kaplayacaktır, yani 4 kısmı suya karşı 1 kısmı yulaf vardır. Bu oran yulaf miktarı ve kap hacminden bağımsızdır.

İki Sayılı Sayı

Sanıldığı gibi 10 değil. $\frac{1}{2} = 1$ (veya $\frac{2}{4} = 1$).

Bir Toplam

$1 + 2 + 3 + \ldots + p = p\,(p+1)/2$ (aritmetik diziyi toplamı). Bu toplamın 1979 ile bitebilmesi için en azından p (p + 1) çarpımı 8 ile bitmelidir; çünkü ancak o zaman p (p + 1) / 2'nin son basamağı 9 olabilir (9 x 2 = 18). Fakat ardışık sayı çiftlerinin çarpımının son basamağı 8 olmuyor: 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7, 7.8, 8.9. O halde sözkonusu toplam 1979 ile bitemez.

Dairelerden Üçgen

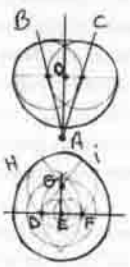
a şeklinde 4 topluk sıranın sol ve sağ ucundaki toplar 2 topluk sıranın sol ve sağ ucuna konup tepedeki tek top, 4'ken 2'ye inmiş sıranın altına konunca b elde edilir.

Bir Seçim Problemi

Adımda her ilin başkan seçimine etkisi eşit; çünkü hiçbir il tek başına başkan çıkartamıyor. İki ilin toplamı da 37'yi bulmuyor. O halde herhangi 3 ilin koalisyon yaparak anlaştıkları bir başkanı seçmeleri gerek. 5 il arasında 10 türlü üçlü koalisyon yapılabilir (10/5). Nüfusu en az olduğu için oyunuz E eyaletinde en ağırlıklı.

Kastane ve Yumurta Çizmek

Kestane: Birbirini kesen iki eşit daire çizin. Merkezleri birleştiren doğru parçasının ortasını alın (0) ve buradan bir dik çıkın. Bu dik üzerinde dairelerin hayli uzağında bir nokta alın (A); bu noktayı merkezlere birleştiren doğruları uzatarak çemberleri kestirin (B ve C) ve pergelin ayağını A'ya koyup AC kadar açın ve BC yayını, sonra 0 merkezli yarım daireyi çizin. Kestaneniz hazırdır.



Yumurta: G merkezli bir daire çizin. Kenara yakın DF kitişini çizin ve bunun ortası E'yi bulun. DG'yi uzatarak I ve FG'yi uzatarak H noktalarını belirleyin. E merkezli yarım daireyi ve D merkezli, DI yarıçaplı ve F merkezli FH yarıçaplı yayları çizin. Yumurtanız hazırdır. Beyniniz yiyebilir.

Sürpriz Sınav Paradoksu

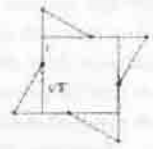
Şöyle düşündüm: "Sınav tabii ki cuma olamaz; çünkü perşembe akşamına kadar sınav olmazsa, bu işin cumaya kaldığı bellidir. Oysa profesör sınavın bize sürpriz olacağını söylemişti. O halde cuma ekarte edilebilir. O zaman sınav için olası son gün perşembe olur. Fakat çarşamba akşamına kadar sınav yapılmazsa, perşembe sabahı o günün sınav günü olacağını bileceğiz (cumayı zaten ekarte ettiğim için), sınav yine bir sürpriz olmayacak. Perşembeyi de ekarte ettim." Aynı mantıkla çarşamba, salı ve pazartesiyi de ekarte ediyordum. Acaba mantığım hatalı mı? Bu konu Kurt Gödel'in belirlenemez önermeler kavramına girmektedir. Benzer olarak bir mahkûma pazartesi sabahı: "Seni bu hafta içinde bir gün asacağız, bu sana sürpriz olacak, asılacağın günün sabahı o gün asılacağını bilmeyeceksin." demiş olsunlar. Sınav için kullandığımız mantığı uygularsak mahkûm asılamaz. Çünkü perşembe gece yarısına kadar asılmazsa cuma asılacağı kesindir, asılma sürpriz olmaktan çıkmıştır; aynı mantıkla perşembe de asılamaz vb. (ünlü Asılan Adam-Hanging Man-Paradoksu). Bu ünlü problem üzerinde düzinelerce makale yazılmıştır. Konu Gödel'in Belirlenemezlik kavramıyla ilgilidir. Burada Raymond Smullyan'ın Forever Undecided (A Puzzle Guide to Gödel) (Sonsuza Kadar Belirlenemez - Gödel için Bilmece Rehberi) adlı kitabındaki yorumu veriyoruz: Profesör iki şey söylemiştir: 1) Bu hafta içinde bir gün sınav yapacağım. 2) Sınav sabahı o gün sınav olduğunu bilemeyeceksiniz. Profesörün iki cümleri de doğru olamaz. Profesörün 1. cümlesine inanırsam 2. cümlesi doğru çıkmamaktadır. 1. cümleden şüphe edersem cuma sabahı o gün sınav olacağından emin olamam ve sınav bana sürpriz olabilir. O halde 2. cümlenin doğru çıkıp çıkmamasını benim 1. cümleye inanıp inanmamam belirliyor. Profesörün haklı çıkması için ondan şüphe etmem gerekiyor. Ona inanırsam yalancı çıkıyor. Ne paradoks değil mi? Bu problemin "bir gün"lük şeklyle paradoks daha iyi anlaşılmaktadır. Bir profesör "bugün size sürpriz bir sınav yapacağım" diyebilir mi? Diyemez; çünkü o sınavın artık sürpriz niteliği kalmamıştır. Adımda bir haftalık durum da bundan farksızdır.

Hendek Kazacılar

Abraham (A) 10 ve Benjamin (B) 20 dolar almalıdır. B tek çalışa diyelim ki 2 saatte hendeği kazar, 4 saatte birken toprağı atar, toplam 6 saatte işi bitirindi. A yalnız çalışsa B'nin 4 saatte attığı toprağı 4 saatte kazar (A'nın kazma hızı = b'nin atma hızı olduğundan, B'nin 4 saatte attığını A 4 saatte kazardı) ve bu toprağı 8 saatte atar, 12 saatte işi bitirirdi (A'nın atma hızı = B'nin kazma hızı/4; bu nedenle B'nin 2 saatte kazdığını A 8 saatte atabilir). Görülüyorki A'nın kazma hızı = B'nin kazma hızının yarısı ve A'nın atma hızı = B'nin atma hızının yarısı). Bu durumda A 1 pay alırsa B 2 pay almalıdır. Adil bölüm, A'ya 10, B'ye 20 dolar şeklindedir.

Sekiz Nokta Problemi

Yıldız biçimi düzgün bir sekizgenin köşelerini aranan noktalardır. Bir karenin kenarlarına 4 dikiliğen ekleyerek nasıl 8 köşeli bir yıldız yapıldığını görüyorsunuz; bunun için karenin her kenarı 1 ve √3 otanında üçye ayrılmalı, dikiliğenlerin dikkenarları 1 ve √3, hipotenüsü ise 2'dir.



Üçgeni Beşe Bölme

Bu yalnız tepeçayı 120° olan bir ikizkenar üçgende olasıdır. Genelleme: Bir üçgeni kendine benzer n üçgene ayırmak. n = 2 veya 3 için çözüm yalnız dik üçgenlerdedir. n = 4 her üçgende olasıdır. n = 5 dik üçgende ve 120° tepe açılı ikizkenar üçgende olasıdır. n ≥ 6 için her üçgende çözüm vardır.

Karelerin Tersi

$1 + \frac{1}{4} = \frac{2^2-1}{2^2} = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$

$1 + \frac{1}{9} = \frac{3^2-1}{3^2} = \frac{3+1}{3} \cdot \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}$ vb.

$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{16}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{289}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{16}{15} \cdot \frac{15}{16} = 9/15$

(Her parametre 2. terimi ile bir sonraki parametre 1. terimi birbirini götürüyor, örneğin $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$, sonra $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$ vb. En sonda kalan $\frac{9}{15} \cdot \frac{16}{15} = 8/15$).

Suda Yüzen Küpler

Her iki durumda da altta kalan küp suya 3 cm batar.

Robot R - 15

Kuşkusuz eksik kalan görev T-12, robotun bu mesajı yollaması işidir. Burada yine bir çelişki yaşanmaktadır. T-12 görevi robotun mesaj yollama sisteminin bozulduğunu merkeze bildirmesidir. Fakat telsiri bozulan bir gemi veya uçak telsizinin bozulduğunu nasıl merkeze duyurmamızı, mesaj yollama sistemi bozulan bir robotta merkeze bu bozukluğu tam iletemez. Merkez, robottan sonu eksik bir mesaj alırsa, robotun mesaj yollama sisteminin bozulduğunu anlayacaktır.

Gödel buna benzer olarak şu örneği almıştır:

"Tümdengelimci (dedüktif) X sistemi ne yazık ki G önermesinin doğruluğunu gösterebilecek güçte değildir." Tırnak içindeki ifade ise G önermesinin ta kendisidir. Şimdi sonuç nedir? G önermesi, X sistemi içinde kendi doğruluğunun kanıtlanamayacağını söylüyor. (Gödel her tümdengelimci sistemde G tipi bir cümle olacağını göstermiştir.) G cümlesinin şaşırtıcı özelliklerini birlikte görelim. G cümlesi doğru mudur, yani G cümlesi X sistemi içinde kanıtlanabilir mi? Diyelim ki doğrudur, fakat doğruluğu kanıtlanan şey "G cümlesinin X sistemi içinde kanıtlanamayacağıdır"; yani X sistemi içinde G'nin kanıtı yoktur. Varılan sonuç şudur: G cümlesi doğrudur; fakat G cümlesinin doğruluğu X sistemi içinde kanıtlanamaz.

Bunu şu küçük bilmeceyle daha iyi anlatalım.

1- G cümlesi kanıtlanamamasına rağmen doğrudur.

2- G cümlesi kanıtlanamadığı için doğrudur.

Bu cümlelerden hangisi doğrudur? İşte şimdi "Gödelizm"e yakalandınız. Her ikisi de doğru gözüktüyü değil mi?

Gödel'ın 1931'de ortaya attığı matematikte devrim yaratan gerçek şudur: ne kadar güçlü ve çok yönlü olsa da, her X sistemi içinde doğruluğu kanıtlanamayacak doğrular vardır. Hiçbir X sistemi bütün doğruları kanıtlayabilecek güçte değildir. Gerçekleri istediklere benzetirsek, hiçbir sistem her istediğimizi yerine getirmez. Her sistemden, onda bulunmayan bir gerçek istememiz olasıdır. İşte buna "Gödel gerçeği" denmektedir. En az bir kanıtlanamayan doğru içeren sistemlere "eksik" (incomplete) ve bu gibi kümelere üretken (produktif) denir.

Mantıkçının Tutarlı Oluşu

a) Tutarsız olduğuna inanan bir mantıkçı ya yanılıyordur veya gerçekten öyledir. Kanıtlayabiliriz ki her iki durumda da bu mantıkçı yanılıyordur. Bu inancının aslı yoksa yanılmış demektir (Tutarsız olduğunu düşünmekle kendine haksızlık etmektedir). Bu mancında haklıysa, yani gerçekten tutarsız ise, yanlış önermelere inandığı için bu sıfatı (tutarsız sıfatını) hakketmiş demektir. İşte Gödel'e özgü üpik belirsiz bir cümle. Mantıkçı gerçekten tutarlı olsa dâ, olmasa da yanılıyordur.

b) Eğer yanılıyorsa doğru düşünüyor demektir, o zaman bu düşündüğü de doğrudur, yani doğru düşünmemektedir. Bu çelişkidir. Eğer yanılmıyorsa, gerçekten doğru düşünmemektedir, o halde bu düşündüğü de doğru değildir; bu durumda doğru düşünmesi gerekir (Çünkü doğru düşünmediğini düşünmektedir). Sonuç: Çelişki. Yine Gödel'e özgü belirsiz bir cümle.

Sayrama Futbol

$425^2 = 180\,625$

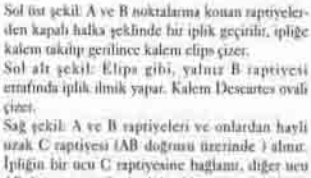
4 Tane 4

$4/4 = (4 - 4) = 1$, $4/4 + (4/4) = 2$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{4} - (4/4) = 3$, $\sqrt{4}$. $\sqrt{4}(\sqrt{4}/\sqrt{4}) = 4$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{4} + (4/4) = 5$, $4!/4 + (4-4) = 6$, $(4!/4) + (4/4) = 7$, $\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 8$, $4 + 4 + (4/4) = 9$.

Nasıl Kurtulabilirler?

Herbiri diğerinin giyotin ipini elinde tutuyor. Durum iki nükleer süpergücün durumuna çok benzemektedir. Birinin ipi bırakması öteckinin de bırakması demektir. Kurtulmaları ancak diğer kolların kullanmalarıyla mümkün olur. Çok zor olmakla beraber ip tutmayan kolların kullanarak iki ipi sımsıkı birbirine bağlayabilir ve böylece bıçakların düşmesini önleyerek kafalarını sıkıştıran tahtaları ayırıp, kurtulabilirler. Bir diğer çare yine ip tutmayan kolların yardımıyla ipleri değiş tokuş etmeleridir. Herbiri bir eliyle kendi giyotininin ipini tutarken diğer eliyle tahtaları açıp kafasını kurtarabilir. Nihayet akla şu gelebilir: Son çare olarak ellerindeki ipleri yanlarındaki adama fırlatmayı ve serbest kollarıyla ipi tutmayı deneyebilirler. Acaba herbirinin giyotin bıçağı aşağı düşmeden önce ipi yakalama şansı var mıdır? Bunu hesaplayalım. Giyotin bıçağı yerden h m yükseksse düşme zamanı $t = \sqrt{2h/g}$. İpi sarkaç kabul edelim; ipin ucu, bulunduğu yerden öteki adamın kafasına gelirken sarkaç periyodunun 1/4'ü tamamlanmış olur (tam periyod = ipin ucunun başladığı noktaya dönüşü). $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (L = ipin uzunluğu, g = yerçekim ivmesi, yaklaşık 10 m/saniye²). $T/4 = \frac{\pi}{2}\sqrt{L/g} > \sqrt{2h/g}$'den $L > 8$ h ve $L > \frac{2}{\pi}$ h. Örneğin: h = 9 m ise L > 8 m olunca giyotin düşmeden ipi tutmak mümkün olur. Zaten L hipotenüs olduğundan daima L > h dır; mahkûmlar ipi fırlatarak kurtulabilirler.

Elips, Oval, Yumurta



Sol üst şekil: A ve B noktalarına konan raptiyelerden kapalı halka şeklinde bir iplik geçirilir, ipliğe kalem takılıp gerilince kalem elips çizer.

Sol alt şekil: Elips gibi, yalnız B raptiyesi etrafında iplik ilmik yapar. Kalem Descartes ovali çizer.

Sağ şekil: A ve B raptiyeleri ve onlardan hayli uzak C raptiyesi (AB doğrusu üzerinde) alınır. İpliğin bir ucu C raptiyesine bağlanır, diğer ucu AB doğrusu etrafında dolandıktan sonra kaleme bağlanır. Kalem bir hiperelips (yumurta benzeri şekil) çizecektir.

Ekim sayısında yayınlanan, "Kareden, Düzgün Sekizgen, Altıgen ve Beşgen Yapmak" ve "16 Meşe ve 5 Çit" başlıklı soruları doğru olarak çözüp, gönderen okuyucularımız arasında çekeceğimiz kurada, iki okuyucumuza Popüler Bilim Kitapları serimizden birer kitap armağan edilecektir.