Korkunç Bir Ünlem İşareti

Dr. Herman AMATO
Çizgiler : **Ferruh DOĞAN**

Gene VE ile VEYA. Şimdiye kadar yazdığımız yazılarla belirsiz durumlarda karar vermenin mümkün olduğunu anlatmıya çalıştık. Klâsik mantık belirli durumlarda karar vermemize yardım ediyordu, tanıtmak istediğimiz mantık ise tamamen belirli olmıyan durumlarda. İnsanın kendini tam bir güven içinde hissetmesi güzel bir şey ise de, tehlikeye karşı gözlerini kapaması ancak deve kuşu tarafından akıllıca sayılabilecek bir davranış olur: Deve kuşu bilindiği gibi düşmanı kendisini görmesin diye başını kuma gömermiş.

Karşımıza çıkan olaylarla ilgili ön bilgilerimiz çogunlukla kat'i değildir. Ve bunlara klâsik mantığı uygulamak yersizdir. Sonuç hayal kırıklığı, hatta daha kötüsü mantığımıza olan güveni yitirmek olabilir. Eğer belirsiz durumlara uygulanacak mantığı kullanırsak ne dereceye kadar yanılabileceğimizi önceden kestirerek davranışımızı ayarlıyabiliriz. Beklediğimiz olayla karşılaşmazsak güvenimiz sarsılmaz, olayı daha yakından inceleriz. Bir yandan güvenimiz korunurken, diğer yandan tekrar tekrar incelediğimiz olaya daha fazla hakim oluruz.

VE ve VEYA ile ilgili formüllerin hem klâsik mantıkta hem de ihtimaller mantığında uygulanabileceğini geçen yazımızda anlatmıya çalıştık. Klâsik mantık ancak 0 (sıfır) ve 1 (bir) ile yani tam yanlış ve tam doğru değerler verilebilen hükümlerle uğraşıyordu. İhtimaller mantığı ise bu iki degerin arasındaki orantılardan yapılmış bütün alanı kapsıyor.

Formül ezberlemekten hoşlanmıyorsak, VEYA ve Ve ile ifade edilen durumları ayırabilmek alışkanlığını kazanmalıyız. Bir olayın gerçekleşmesi diğer bir olayın gerçekleşmesinin yerini tutabiliyorsa VEYA, bir olay diğer bir olayla birlikte ortaya çıkıyor veya onu takip ediyorsa VE, kelimeleri durumları ifade eder. VEYA ile anlatılmak istenen durumların bileşik ihtimallerini hesaplarken, basit olayların ihtimallerini toplar, bu basit olayların birlikte ortaya çıkma ihtimalini toplamdan düşürürüz. Örneğin iki zarla atışta 5 VEYA 6 dan birinin çıkması şartımızı dolduruyorsa, herbir zarla 5 VEYA 6 elde etme ihtimali 2/6 dır (6 yüzden ikisi ihtiyacımızı karşılamaktadır). Bu olayların birlikte çıkma ihtimalleri $2/6 \times 2/6 = 4/36$ dır. Toplamdan bu sayıyı düşürürsek aradığımız ihtimali buluruz : $2/6 + 2/6 - 4/36 = 20/36$. Bu müşterek kısmı düşürmek 5-5, 6-6, 6-5 ve 5-6 hallerini ikişer defa saymaktan bizi korur.

VE ile ifade edilen olayların ihtimalleri çarpılır. Ancak bir olayın ortaya çıkışı diğer olayın ihtimalini etkiliyorsa bu etkiyi de hesaba katmalıyız. Örneğin 1 den 10 a kadar numaralanmış 10 bilye bulunan bir torbadan 1 No.lı bilyeyi çekme ihtimali 1/10, 10 numaralı bilyeyi çekme ihtimali gene 1/10 dur. Fakat önce 1 numaralıyı sonra 10 numaralıyı çekme ihtimali $1/10 \times 1/10$ de-

Şekil 1. Ünlem işaretinden korkmayınız. İleride işinizi çok kolaylaştıracaktır.

ğil 1/10 × 1/9 dur. Çünkü bir numaralı bilye çekildikten sonra bilyelerin sayısı 10 dan 9 a düşmüş, 10 numaralı bilye 9 bilye arasından çekilmiştir.

VEYA hali bir toplama kaidesi, VE hali bir çarpma kaidesidir. Bilindiği gibi tam sayılarla toplama hızlı bir sayma, çarpma, toplanacak sayıların eşit olduğu hallere uygulanan, hızlı bir toplamadır. O halde çarpma ve toplamanın uygulandığı birçok hallerde sayma da uygulanabilir. Bütün imkânları açık olarak belirttikten sonra şartımızı dolduranların sayısını, bütün imkânların sayısına bölmek birçok hallerde ihtimalleri hesaplamıya imkân verecektir.

Ünlem işaretinden korkmıyalım. VEYA halinde çeşitli imkânları hesaplarken eğer olayların ihtimalleri birbirine eşit ise toplama yerine çarpmadan istifade ederek işlemi hızlandırabiliriz. Ancak bunu yapabilmek için ünlem işaretinden korkmamalıyız. Örneğin tek zarla 4 atışta, sıraya bakmaksızın 1, 2, 3, 4 sayılarını elde etme ihtimalini hesaplıyalım. Kazanabilmemiz için yalnız bu sayılardan biri değil, dördü de çıkmalıdır. Ama bunların çıkış sırası önemli değildir. O halde bu 4 sayı yardımıyla yapılabilecek bütün sıralar kadar degişik olaylar şartımızı doldurur. Sırasıyle 1234 veya 4231 elde etmek bizim için farketmez. Halbuki piyango biletinde bunlar değişik iki sayıdır. Kaç imkâna sahip olduğumuzu önceden kestirebilmek için bu 4 sayı yardımıyla yapılabilecek bütün sıraları yazmalıyız, sonra da bu yazdıklarımızı saymalıyız. Bu hem uzun hem de yorucu bir işlemdir. Halbuki bu saymayı yapmak için çok basit bir usul vardır. 4'ün yanına bir ünlem işareti koyarız, olur biter (4!). Bu ünlem işareti sizi şaşırtmasın, 1 den 4'e kadar bütün sayılar çarpılacak demenin kısa bir şeklidir ($4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$). Demek ki 4 unsuru farklı şekillerde sıralıyarak 24 değişik sıra elde edebiliriz. Açıktır ki 5 unsurun kaç farklı şekillerde sıralanacağını bulmak için bu sefer 5 in yanına ünlem işaretini koyacak ve 1 den 5 e kadar olan sayıları birbirleriyle çarpacağız.

Bu olayı açıklamak için ilk örneğimize dönelim. Elimizde 4 işaret bulunduğu için yazılabilecek bütün sıralar bunlardan biri ile başlamalıdır (1 ile, 2 ile, 3 ile veya 4 ile). Başlamış olan 4 sıranın herbirine başta kullanılmamış 3 sayıyı değiştire değiştire koyarak bunların herbirinden, iki sayı ihtiva eden 3 er sıra türetebiliriz. Böylece iki sayı ihtiva eden sıralar $4 \times 3 = 12$ olur. Örneğin 1'in yanına 2, 3, 4 koyarak 12, 13, 14 sıralarını türetebiliriz. 2, 3 ve 4 den türetilebilecek 2 li sıraları kendiniz bulmıya çalışın.

İki unsuru bulunan 12 ($= 4 \times 3$) sıranın herbirinden aynı şekilde başta kullanılmamış olan 2 sayıyı kullanarak, 2 şer yeni 3 lü sıra türetebiliriz. Böylece 3 unsuru bulunan sıraların adedi $4 \times 3 \times 2 = 24$ olur. Örneğin 13 yanına 1 ve 3 koyamayız, çünkü bu sayılar başta kullanılmıştır. 4 ve 2 koyarak 134 ve 132 sıralarını elde ederiz. 3 unsuru bulunan 24 ($= 4 \times 3 \times 2$) sıranın her birinden ancak tek bir 4 lü sıra elde ederiz. Böylece türetilebilen bütün 4 lü sıralar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ olur. Sıralar uzadıkça her kademede kullanabileceğimiz sayılar teker teker eksildiğinden, herbir sıradan türetebildiğimiz sıralar teker teker azalmaktadır.

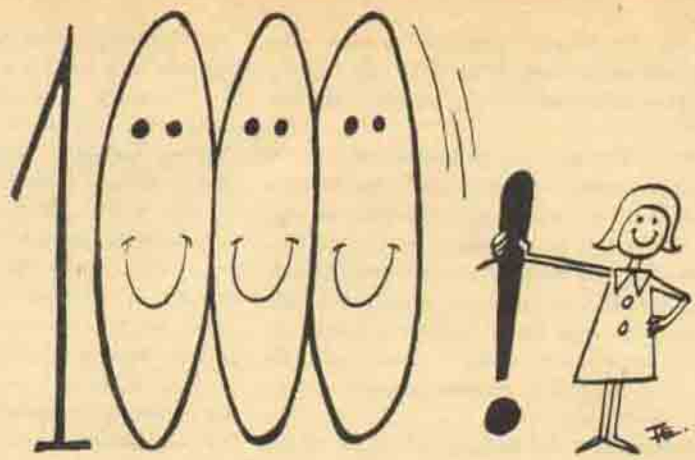
24 adet dörtlü sırayı açık olarak yazalım :

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Bunları sayın ve bu 4 sayı ile bunların dışında bir sıra yapıp yapamıyacagınızı bulmıya çalışın.

Buraya kadar problemin birinci bölümünü hesapladık. Problemi çözmek için bir zarla 4 atışta gelebilecek bütün imkânları kapsıyan tablodaki bütün değişik 4 lü sıraların sayısını bilmeliyiz. Bu tablodaki sıralardan birine örnek olarak 4642 yi gösterebiliriz, birinci atışta 4, ikinci atışta 6, üçüncü atışta 4 ve 4 üncü atışta 2 geldi demenin kısa bir şeklidir. Bu gibi sıraların tümü kaç tanedir? Bunu hesaplıyabilmek için gene basit bir usul vardır : Zar yüzü sayısını temsil eden 6 nın üzerine atış sayısını temsil eden 4 ü yazdık mı olur biter ($6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$).

Birinci örnekte bir sırada kullandığımız bir sayıyı o sırada ikinci defa kullanmıyorduk, böylece sıra büyüdükçe türetilebilecek sıralar birer birer azalıyordu. Halbuki bir zar atışı sonunda herhangi bir sayının elde edilmesi, ikinci atışta aynı sayının gelmesini engellemez. Böylece başta elde edilebilen 6 değişik halin her birinden gene 6 değişik hal türetilerek, iki atışta $36 = 6 \times 6$ durum. Bu 36 durumun her birinden gene 6 halin türetilmesi ile üç atışta $6 \times 6 \times 6 = 216 = 1296$ durum elde edilir. Örnek olarak 3 atışta elde edilebilen 216 durumdan biri 342 olsun, bu önce 3, sonra 4 sonra da 2 geldi anlamına gelmektedir. 4 üncü atışı yaparken gene 6 imkân olduğundan (zarın 6 yüzü) ortaya çıkabilecek halleri şöyle ifade edeceğiz: 3421, 3422, 3423, Şekil 2. Eğer 1'den 1000'e kadar bütün sayıları çarpacaksanız, uzun uzadıya yazmanıza lüzum yok, 1000'in yanına bir ünlem işareti koyun yeter. Bunu yapmakla bir taşla iki kuş vurmuş oluyorsunuz: 1000 kişinin kaç farklı tek sıra yapabileceğini de hesaplamış oluyorsunuz



3424, 3425, 3426. Yani 216 durumdan her biri 4 üncü atışta 6 şar yeni durum meydana getirecektir.

Eğer bu söylediklerimiz size açık gelmediyse eski yazılarımızı yeniden gözden geçirin, orada 2 zarla nasıl 36 değişik karşılaşma sağlandığının açık örneğini bulacaksınız. Bu örnekten başlıyarak 3 zarla yapılabilecek 216 karşılaşmayı siz de açık bir tablo şeklinde yazmıya çalışın. Bunu yaparsanız hiç pişman olmıyacaksınız. Şimdi 4 basamaktan yapılmış 1296 adet sayı bulunan bir cetvel düşünün. Bu cetvel bir zarla dört atış yapılarak çıkabilecek bütün imkânları kapsamaktadır. Bunların içinde biraz önce açık olarak yazdığımız 24 sıra var ki ancak 4 atışta bunlardan birini tuttursak kazanacağız. Durum 1296 bilet içerisinden sanki 24 piyango bileti almışız gibidir. Buna göre kazanma şansımız 24/1296 olur. Aradığımız ihtimal de budur.

lerin birini hesapladıktan sonra, 6 gösteren zarların değişmesiyle kaç farklı durum elde edebileceğimizi hesaplamalıyız. Bunlar VEYA halleridir. Şartımıza göre 2 defa 6 gelecek ve 4 defa 6 dışı bir sayı gelecektir. O halde özel bir hali hesaplamak için 2 defa 6 elde etme ihtimalini ve 4 defa 6 elde etmeme ihtimalini yazıp çarpmalıyız:

$$1/6 \times 1/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 = 625/46656$$

Şimdi 6 renkli zar tasarlıyalım. 6 gelme halini + ile işaretliyelim, diğer yerlere hiç işaret koymıyalım:

Yukarıki cetvelden 6 zarla 15 farklı şekilde 2 defa 6 elde edilebileceğini görüyoruz. Bunlar çeşitli VEYA ile ifade edilecek durumlardır. Herbirinin ihtimali özel hal için bulduğumuza eşit olduğundan özel hal için bulduğumuz ihtimali 15 defa yanyana yazıp toplamalı veya daha kısası 15 ile çarpmalıyız. Sonuç: 9375/46656 olur.

2) Yukarıki problemde çeşitli VEYA hallerini hesaplamak için daha basit bir yol bulup bulamıyacağınızı inceleyiniz?

ZAR RENKLERİ	ALTI GÖSTEREN ZARLAR														
KIRMIZI	+	+	+	+	+										
YEŞİL	+					+	+	+	+						
SARI		+				+				+	+	+			
SİYAH			+				+			+			+	+	
MOR				+				+			+		+		+
TURUNCU					+				+			+		+	+
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Geçen sayıda sorulan problemler ve cevapları:

1) 6 zarla 2 defa 6 elde etme ihtimalini hesaplayınız.

6 elde etme ihtimali 1/6; 6 elde etmeme ihtimali 5/6 dır. Burada VE ile ifade edilen durum söz konusudur, ihtimalleri çarpmalıyız. Özel hal-

Yukarıki cetvelde ne yaptık? 6 değişik renkten çeşitli ikili seçimler yaparak, bu renklere uyan zarlara 6 ları yerleştirdik. Şimdi 6 renkten kaç farklı ikili seçim yapabileceğimizi araştıralım. Ön-