MATEMATİKÇİ MAKİNELERİN ÇAĞI

Derin öğrenme tekniği sayesinde yapay zekâda kayda değer ilerleme sağlandı. Ancak satranç ve Go ustalarını yenen algoritmaların gerçekten akıl yürüttüğü söylenebilir mi?

Prof. Dr. A. Muhammed Uludağ | *Galatasaray Üniversitesi, Matematik Bölümü*

(0,1)
M = 0.046765 mol / 3 0L = 0.016M
E = MC²
V = ¼¶r²h
A = ¶r²h
f(x) = a (x-x1)(x-x2)
cos (B) = y/x
1/2 = y/8
y = 4

Matematik ve Yapay Zekâ (YZ)

Dışarıdan bakanlar için matematik, bazı formüllerin uygulanmasından ibaret, yeknesak bir bilim gibi görünse de erbabına sorulacak olursa güzel sanatlara daha yakın bir disiplindir. Matematiği üretmek, yani yeni teoremler ve daha da önemlisi kavramlar ve yapılar ortaya koymak, en az müzik veya resim kadar güzellik anlayışımıza hitap eden bir faaliyettir. Buna ilaveten, aksiyomatik yöntemi kullandığı için son derece titiz bir akıl yürütme gerektirir.

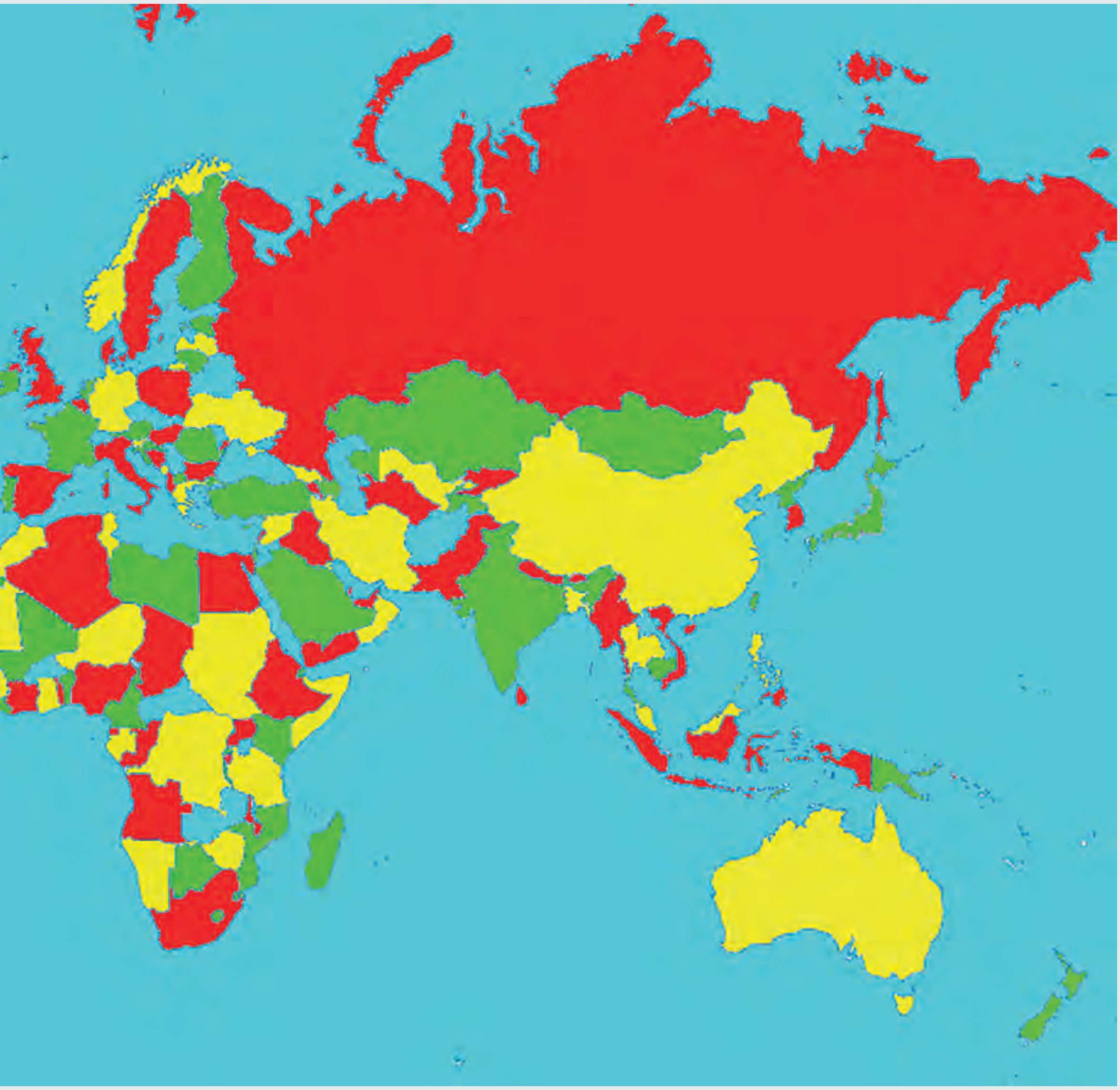
Estetik yönü bu derece ağır basan matematik üretme işini bilgisayarlara havale edebilir miyiz?

Şayet matematiği dört işleme indirgersek hesap yapan makinelerin izi 17. yüzyıl Avrupasına kadar sürülebilir. Satranç oynayan bir otomat yapma fikri ise ilk defa 18. yüzyılda Avusturya'da ortaya atıldı. Mekanik Türk isimli sahte otomat, içindeki cüce satranç oyuncusu sayesinde rakiplerini yenebiliyordu. Gerçek satranç bilgisayarları ancak 20. yüzyıl ortalarında belirmeye başladı ve hızla insanlarla rekabete girdiler. Uzay ve içindeki bölgeler hakkındaki sezgilerimize dayandığından, satranca kıyasla matematiğe daha çok benzeyen Go oyununda insanlar teslim bayrağını biraz daha geç, 2017 yılında, çektiler. Google'ın AlphaGo yazılımı, oyunu insan rehberliği olmadan tamamen kendi kendine oynayıp öğrenerek Go ustalarını yenmeyi başardı. Artık bir insanın Go oyununda cep telefonuna yenilmesi sıradan bir şey.

Son birkaç sene içindeki bu baş döndürücü gelişmeleri, "derin öğrenme" adı verilen tabakalı yapay sinir ağlarına borçluyuz. Derin öğrenme veya daha genel ismiyle makine öğrenmesi, elde büyük miktarda veri varsa işe yarar. Yapay sinir ağı bu veri yığını üzerinde bir çeşit tarama (teknik tabiriyle "gradyen takip etme") yöntemiyle yapılandırıldıktan sonra yeni durumlara uygulanır. Sinir ağının verdiği cevaplar tahminî olup matematiksel kesinliğe sahip olmasa da birçok alanda insanların verdiği cevaplara göre çok daha iyi olma potansiyeline sahiptir.

Elbette matematik yapmak, kuralları önceden belirlenmiş bir oyuna indirgenemez. Kaba bir benzetme yapılacak olursa matematik sanatının içinde oyunun kurallarını değiştirmek, yeni oyunlar hayal etmek ve bu oyunlar hakkında genel iddialar ileri sürüp ispatlamak da vardır. Bugün Oberwolfach Matematik Enstitüsü'nün kayıtlarını tuttuğu matematik yazılımlarının sayısı 150'ye ulaşmış durumda. Bu yazılımlar sayısal veya sembolik hesap yapma konusunda bizden çok daha iyiler. Wolfram alpha yazılımı, internet sitesi üzerinden merak ettiğiniz birçok matematik sorusunu cevaplayabilir.

Bazı durumlarda bir matematik problemi, çok sayıda özel durumun ayrı ayrı hesaplanmasına indirgenebilir. Bu tür problemlerin en bilinen ve en eski örneği 4-renk teoremidir. Çok basit gibi görünen bu tahminin ispatlanması için 125 sene geçmesi ve bilgisayarların yapabileceği hacimde bir hesap problemine indirgenmesi gerekti. Bu indirgeme, kayda değer bir insan mesaisi ve yaratıcılığı sayesinde elde edilebildi.



4-renk teoremi:

"Düzlemde verilen bir haritayı, komşu ülkeler aynı renkten olmayacak şekilde renklemek için 4 renk daima yeterlidir."

1852'de tahmin edilen bu teorem, ancak 1976'da, bilgisayar yardımıyla ispatlanabildi.

4-renk teoreminin iddiası resimde hem maviden başka renkte iç denize hem de mavi renkli iç ülkeye izin vermektedir.

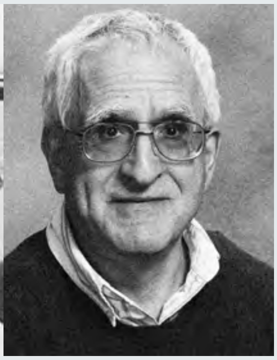
4-renk teoreminden bugüne bilgisayar yardımıyla ispatlanan başka tahminler de oldu. 2016 Mayıs ayında Marijn Heule, Oliver Kullmann ve Victor Marek tarafından verilen “Pisagor üçlüleri problemi”nin çözümü, Texas İleri Hesaplama Merkezi’ndeki Stampede (İzdiham) bilgisayarı yardımıyla üretildi. Bu çözümün ispatı ise 200 terabit hacmindedir. Bu noktada, her matematik probleminin çözümünün sonlu sayıda durumun sonlu adımda hesaplanmasına indirgenemeyeceğini tekrar vurgulamak gerekir. Nitekim Pisagor üçlüleri problemi çözümsüz olsaydı bunu aynı yöntemle bilgisayara ispatlatmak mümkün olmazdı.

Pisagor üçlüleri problemi:
Pozitif tamsayıları mavi ve kırmızı diye ikiye ayırmak mümkün müdür, öyle ki $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan hiçbir (a,b,c) Pisagor üçlüsü aynı renkte olmasın?
Çözümü:
Teorem: {1, ..., 7824} kümesi bu şekilde ikiye ayrılabilir, ancak {1, ..., 7825 } kümesi için bu imkânsızdır.

Bilgisayar yardımıyla ispat konusundaki tüm bu gelişmelere rağmen, matematik üretme ve ispatlama konusunda bugün bilgisayarlar hâlâ emekleme aşamasındadır. Matematikçilerin araştırma esnasında özel yazılımlar kullanması çok sık rastlanan bir uygulama olsa da teorem üretme ve ispatlama konusunda alınacak çok mesafe var. YZ yüzünden birçok mesleğin hızla yok olmasından endişelendiğimiz yakın gelecekte, matematik mesleğinin yeri sağlam görünüyor. Zira YZ algoritmalarının üretiminde ve uygulanmasında matematik vazgeçilmez bir öneme sahiptir.


Marijn Heule


Oliver Kullmann


Victor Marek

Tüm bilimsel makaleler yayımlanmadan önce hakeme gider. Ancak uzmanlaşma ve makale enflasyonu gibi sebepler, matematikte hakem süreçlerini senelerce uzatmakta ve güvenilirliğine zarar vermektedir. Bu noktada bilgisayarlar matematikçilere yardımcı olabilir.

Matematiğin darboğazı

Üç elit matematikçinin onlarca senelik birikimlerini ortaya döktükleri yüz sayfalık bir makalenin değerlendirme için önünüze geldiğini düşünün. Makalede birçok yeni kavram ve yapı ortaya atılmış. Üstelik makale, birçok matematikçinin yekünü binlerce sayfa tutan eserine atıf veriyor. Sizden bu makaledeki teoremlerin doğruluğunu, şayet doğrularsa verilen ispatların yeterliliğini onaylamanız, cevabınız evetse neticelerin ve makalenin bariz, ilginç ve güzel olup olmadığı konusunda bir hüküm vermeniz isteniyor. İşte akademik bir derginin hakeminden beklenen iş budur. İleri seviyedeki bir araştırma makalesinde, lise çağlarında öğretilen polinom, integral, vektörler gibi zor kavramlara benzer birçok kavram ve yapı bulunur. Bunca emek verilen bir çalışma hakkında sağlıklı bir hüküm vermek de en az o kadar emek gerektirir. Üstelik dergi hakemlerinin vardığı hükmün doğruluğundan daima emin olamayız.

Rus matematikçi Vladimir Voevodsky bir makalesindeki bir anahtar lemma'da hata bulur: Meslektaşı Mikhail Kapranov'la yazdığı makalenin ana neticesinin doğru olmadığını, yayımlanmasından 15 sene sonra ispatlar. Oldukça girift neticelerle dolu makalelerinde bu türden başka hatalar da yapmış olma ihtimali onu "elde ettiğim neticelerin ve ispatlarının doğruluğundan nasıl emin olabilirim?" sorusuna sevk eder. Matematikte her netice öncekilerin üzerine bina edildiğinden, bu sonradan elde edilen neticelerin doğruluğu için de mühim bir sorudur.

Shinichi Mochizuki

ABC tahmini:
Her $\varepsilon > 0$ için $c > rad(abc)^{1+\varepsilon}$ eşitsizliğini sağlayan, $a + b = c$ şeklinde ve aralarında asal olan (a, b, c) pozitif tamsayı üçlülerinin sayısı sonludur.

(rad(n), n doğal sayısının asal bölenlerinin çarpımı şeklinde tanımlanır.)

Nihayet Ekim 2018'de, Fields ödüllü genç matematikçi Peter Scholze'nin başını çektiği bir ekip Mochizuki'nin makalesinde önemli bir hata saptadı.

Voevodsky vaktiyle yayımladığı makalelerdeki hatalar için endişelenedursun, Japon matematikçi Shinichi Mochizuki'nin daha ciddi sorunları var. Mochizuki 2012'de meşhur ABC tahminini ispatladığını iddia etti ancak ispatı hâlâ kabul görmedi. Bu ispat 500 sayfa, dahası başka makale ve neticelere de dayanıyor. Dünyada tüm bu sonuçlara hâkim kimse yok! Yani okuyup hüküm verecek hakem bulmak neredeyse mümkün değil!

Otomatik İspat Sağlama

Bilgisayarlar (henüz) ispat yapamasa da verilen ispatın sağlamasını yapabilir. Bu da hakemlerin işini kolaylaştırabilir.

Mochizuki, ispatının kabul görmesini temin etmek için 2014'te bir çalışma grubu kurdu ancak bu çabası henüz meyve vermedi. Voevodsky'nin hakem meselesine bulduğu çözümse bilgisayarlara dayalı. Evet, bilgisayara ispat yaptırmak çok zor ancak bilgisayar verilen bir ispatın sağlamasını yapabilir. Matematikçi, hakeme sunmadan önce makalesini ispat sağlama programından geçirir. Bu sayede, hakeme düşen, verilen ispatların sunulan neticelere gerçekten tekabül ettiğini teyit etmek (ki bu noktaya ileride döneceğiz) ve neticelerin yayımlanmaya değer, ilginç şeyler olup olmadığına hükmetmektir. Bu sayede muazzam hacimlere ulaşan matematik literatürünün doğru netice ve ispatlar içerdiğinden emin olabilir, yolumuza şüphe ve tereddüt olmadan devam edebiliriz.

2005'te bilgisayarlı ispat sağlama alanında çalışmaya başlayan Voevodsky 2015'te İstanbul Matematiksel Bilimler Merkezi'nde ve Cahit Arf anısına her sene Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde düzenlenen Arf Konferansı'nda "Matematiğin Univalent (tek değerli) Temelleri" başlıklı sunumunda bu konudaki çalışmalarını anlattı.

Vladimir Voevodskii (1966-2017)

1966 yılında Rusya'da doğan Voevodskii 1989'da Moskova Devlet Üniversitesi'nde lisans eğitimini tamamlayıp 1992'de doktora derecesini aldı.

Cebirsel varyeteler için homotopi kuramı geliştirerek Milnor tahminini ispatladığı için Fields madalyasını alan Voevodskii, 2005 yılından itibaren matematiğin formelleştirilmesi ve bilgisayarlı ispat sağlama konularına yöneldi. Ayrıca, Martin-Löf homotopi tipleri kuramına katkıda bulundu. 2017 yılında genç yaşta vefat etti.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
Matematiğin temelleri ve felsefe üzerine önemli etkileri olan bir Alman mantıkçı ve matematikçidir. Zermelo-Freankel küme kuramı ve İyi-sıralama ilkesi üzerine yaptığı çalışmalar ile tanınmaktadır.

Abraham Fraenkel
1922 yılında Zermelo'nun aksiyom sistemini geliştiren Alman asıllı matematikçi.

Matematiği diğer disiplinlerden ayıran husus, bir belitler (aksiyom) sistemi kabul edildikten sonra iddiaların bu belitlerden tamamen mantıksal çıkarım yöntemiyle türetilmesidir. Günümüz matematiğinde bu aksiyom sisteminin Zermelo-Fraenkel kümeler kuramı olduğu kabul edilir. Bilgisayarlı ispat sağlama konusunda karşılaşılan ilk problem, yeterince inşacı olmaması itibarı ile kümeler kuramının bilgisayarla çalışmaya elverişsiz olmasıdır.

Zermelo - Fraenkel Belitleri (ZF)

Kaplam:

$$\forall x \forall y\, [\, \forall z\, (\, z \in x \leftrightarrow z \in y\,) \rightarrow x = y\,]$$

Boş Küme:

$$\exists x \neg \exists y\, (\, y \in x\,)$$

Çiftler:

$$\forall x \forall y \exists z \forall w\, (\, w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y\,)$$

Kuvvet kümesi:

$$\forall u \exists y \forall z\, [\, z \in y \leftrightarrow \forall w\, (\, w \in z \rightarrow w \in x\,)\,]$$

Birleşme:

$$\forall u \exists y \forall z\, [\, z \in y \leftrightarrow \exists w\, (\, w \in x \wedge z \in w\,)\,]$$

Sonsuzluk:

$$\exists x\, [\, \emptyset \in x \wedge \forall y\, (\, y \in x \cup \{\, y, \{y\}\, \} \in x\,)\,]$$

Ayrışma Şeması...

$$\forall u_1 \ldots \forall u_k [\, \forall w \exists v \forall r\, (\, r \in v \leftrightarrow r \in w \wedge \psi_{x,\hat{u}}\, [r, \hat{u}]\,)\,]$$

Yer Değiştirme Şeması...

$$\forall u_1 \ldots \forall u_k [\, \forall x \exists ! y\, \emptyset\, (\, x, y, \hat{u}\,) \rightarrow \forall w \exists v \forall r\, (\, r \in v \leftrightarrow \exists s\, (\, s \in w \wedge \emptyset_{x,y,\hat{u}}\, [\, s, r, \hat{u}\,]\,)\,)\,]$$

Düzenlilik...

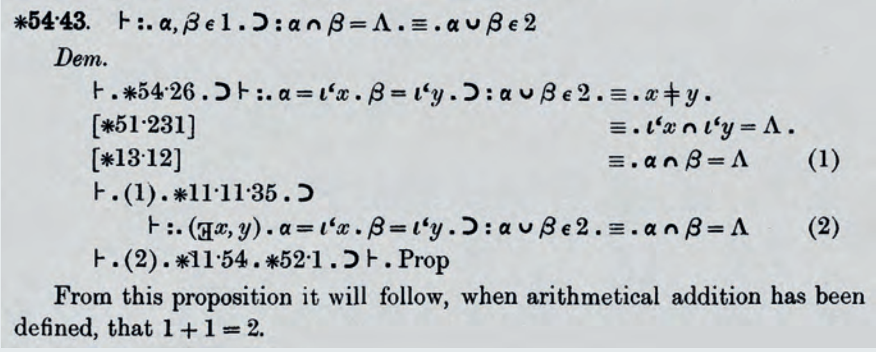
$$\forall x\, [\, x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\, (\, y \in x \wedge \forall z\, (\, z \in x \rightarrow \neg\, (\, z \in y)))\,]$$

Belitler matematikte yola çıkış noktamızı teşkil eden temel önermelerdir. Bu yüzden anlaşılır, sade, tutarlı ve bağımsız iddialardan oluşmaları istenir. Matematiğin temeli kabul edilen ZF belitlerinin ilk altısı yukarıda verilmiştir. İlk belite göre aynı elemanlara sahip iki küme eşittir, ikincisi boş kümenin mevcut olduğunu söyler. Üçüncü aksiyoma göre, A ve B birer kümeyse, elemanları A ve B'den ibaret olan küme mevcuttur. Dördüncü aksiyom her kümenin kuvvet kümesinin var olduğunu söyler. Beşinci aksiyoma göre her küme ailesinin birleşimi de bir kümedir. Altıncısı ise sonsuz bir kümenin var olduğunu söyler.

L. E. J. Brouwer gibi mantıkçıların, Gottlob Frege'nin *Begriffsschrift* (kavram yazımı) eserinde geliştirdiği matematiksel mantık kuramında bulunan Russell paradoksu gibi çelişkileri gidererek tamamen inşacı (konstrüktif) bir matematik elde etmek için geliştirdikleri "tipler kuramı" ise bilgisayarla çalışmak için elverişlidir. Ancak matematik pratiğinden uzaktır. Tipler kuramında, yukarıda açıklanan ZF kümeler kuramındaki kümelerin yerini, tip adı verilen nesneler alır. Bu sayede "tüm kümelerin kümesi" gibi mantık çelişkilerine yol açan nesnelerin inşa edilmesi engellenir. Brouwer'in inşacı matematik felsefesinin amacı, tüm matematik nesnelerinin, iddialarının ve ispatlarının tamamen sonlu, bilgisayarlarla programlanabilir bir formalizm içinde sunulmasıdır. Ne var ki böyle bir sistemde yapılan ispatlar devasa boyutlara ulaşabilir!

Russell ve Whitehead'in 1+1=2 önermesi için verdikleri ispat bunun çok iyi bir örneğini vermektedir. Birinci cildin 379'uncu sayfasında verilen önermenin ispatı, ancak ikinci cildin 86'ıncı sayfasında tamamlanmaktadır.

Uygun bir belit sisteminde, bir teorem ve ispatı verildiği zaman, bilgisayarın bu ispatın geçerliliğini sağlamasını hedefleyen disipline, günümüzde **otomatik ispat sağlama** adı verilir. İsveçli filozof Per Martin-Löf'ün geliştirdiği homotopi tipleri kuramı hem bilgisayarlı ispata elverişli hem de matematik pratiğine uygun bir belit sistemi sunar. Voevodsky'nin katkıda bulunduğu bu inşacı tipler kuramında önermeler birer homotopi olarak yorumlanır. Uzay, fonksiyon vb. gibi nesnelerin, topolojik özelliklerini koruyan deformasyonlarına **homotopi** denir. Cebirsel topolojinin bir alt dalı olan **homotopi kuramı**, topolojik nesneleri homotopi bağıntısı altında inceler.



$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha,\beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Russell ve Whitehead, Principia Mathematica, 1. Cilt, 54.43, s. 379.
Yazının çevirisi: "Aritmetik toplama tanımlandığında, bu önermeden 1+1=2 eşitliği çıkacaktır."

Homotopik uzayların cebirsel değişmezleri aynıdır. Martin-Löf'ün özgün keşfi, homotopi kuramının sezgisel tip kuramını modellemek için yeterli olduğunu göstermesidir. Oysa matematiğin tümü için yeterli olan bir belit sisteminin, homotopi kuramı gibi üst seviyedeki bir teoriye kıyasla çok daha derin, temel ve kökten olması beklenirdi.

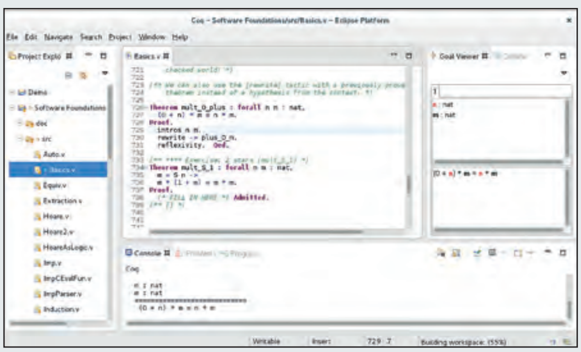
Özetle, homotopi kuramının tipler kuramını modelleyebilecek derinliğe sahip olduğu ortaya çıkar. Bu da üst seviyeden bir dil kullanan cebirsel ve geometrik neticelerin tipler kuramında doğrudan ifade edilebilmesine imkân verir. Homotopi tipleri kuramında teorem ve ispatlar da bir homotopik anlam kazanır.

Per Martin-Löf

Bir başka deyişle, homotopi tipleri kuramında önermeler ve ispatlar mekân sezgimizin temel matematiksel kavramlarıyla modellenir. Böyle olması homotopi tipleri kuramını matematik pratiğine daha yakın kılar. Bu sayede teorem ve ispatlar, özlerini daha iyi yansıtan bir şekilde ifade bulur. Voevodsky'nin geliştirdiği **Matematiğin Univalent Temelleri** projesi ise, homotopi tipleri kuramının kapsayıcı ve hesaplamalı temellerini atmayı hedefler. Bu proje hâlen Coq isimli otomatik ispat sağlama yazılımında, birçok matematikçi ve mantıkçının ortak katkısıyla hayata geçirilmektedir.

Burada amaç, 1+1=2 önermesi gibi matematik külliyatının tüm teoremlerini bilgisayara geçirmek ve sağlatmaktır. Böylece, ispat yapmak isteyen bir matematikçi, bu kütüphanedeki teoremleri ayrıca ispatlamak zorunda kalmadan serbestçe kullanabilir.

Russel-Whitehead'in eserinde şahit olduğumuz üzere, inşacı tipler kuramında ispat yazmak had safhada titizlik isteyen ve çok meşakkatli bir iş olduğundan Coq yazılımı aynı zamanda bir **ispat yardımcısı/etkileşimli teorem ispatlama** işlevi de görür. Yani otomatik ispat sağlayıcıya girilecek ispatın uygun formatta hazırlanması için kullanıcıya destek olur ve kimi basit durumlarda ispatı kendisi önerebilir. Wikipedia'nın "automated proof checking" sayfasında bu işi gören Coq muadili 14 yazılım sıralanmıştır.



Coq yazılımının arayüzü

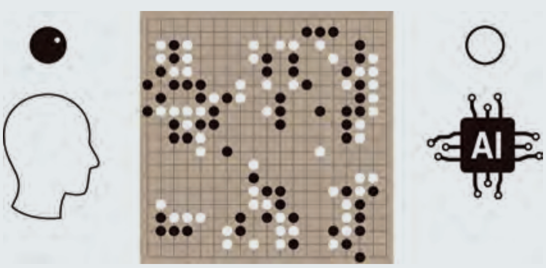
Otomatik Teorem İspatlama

Otomatik ispat sağlama ve ispat yardımcıları, kullanıcının zaten ispatını bildiği bir iddiayı ve ispatını tipler kuramının diline çevirerek bilgisayar tarafından anlaşılır ve sağlaması yapılabilir hâle getirmeyi hedefler. Peki, neden bilgisayarın kendisi ispat yapamasın? Gödel eksiklik teoremine göre, doğal sayıları içeren her sonlu belit sisteminde doğru olan ancak bu belit sisteminde ispatlanamayan önermeler daima mevcuttur. Ezkaza ispatlamaya çalıştığımız iddia bu türden bir önerme ise makine ne zaman duracağını bilmeden sonsuz döngüye girer. Yani bilgisayarlar ispat arayabilir ancak bulabileceğinin garantisi yoktur. Aslında, bu açıdan biz insanların çok da farklı olduğumuzu iddia edemeyiz. Ancak şunu da vurgulamak gerekir ki Gödel eksiklik teoremi aslında matematiğin mekanik bir disiplin olmadığını, daima insani bir yönünün kalacağını da söylemektedir. Şayet muhtemel tüm neticeleri bilgisayara sıralatıp ispatlatmak mümkün olsaydı matematik disiplini tüm cazibesini kaybederdi.

Aslında ispat arama konusunda insanla rekabet edebilecek bir yazılım da bu amaç için "yeterince iyi" sayılır. Ancak (homotopi) tipler kuramı gibi belit sistemlerinin, Go oyununun karar ağacından çok daha hızlı dallanan bir karar ağacı vardır. Kaba kuvvet kullanarak tipler kuramında ispat araması yapmak, günümüz bilgisayarlarının gücünü katbekat aşmaktadır. Belki, quantum bilgisayarları bu konuda bir yenilik getirebilir. Ancak bilgisayarların ispat aramada insanlarla rekabete gireceği günler henüz ufukta görünmüyor. Bu ihtimalin belirmesi için önümüzde en az on beş sene var ama eninde sonunda o günler gelecek!

Matematikçiler ispatları kaba kuvvet kullanarak aramazlar. Yeni kavramlar ve tanımlar ortaya atarak çalışırlar. Bu esnada yeni tahminler ve ispatlanacak yeni iddialar da ortaya atarlar. Yani bilgisayarlar bir gün ispat yapma konusunda insanların önüne geçse de bu matematikçileri işsiz bırakmayacak. Zira "ispatlanacak teorem arama" ve "tahmin ortaya atma" bu yazının başında da belirtildiği üzere son derece estetik ve insani bir uğraştır.

Güncel "makine öğrenmesi"' ve daha özel olarak "derin öğrenme" çalışmaları, Go gibi matematiksel bazı oyunlara uygulanabilse de yaşanan bu gelişmeler ne bilgisayarlı ispat yapma ne de sağlama konularına yönelik değildir. Çıkarımsal ispattan ziyade kestirim yapmaya yöneliktirler ve gradyen takibi yöntemi kullanırlar. AlphaGo yazılımının oynadığı maçların %95'ini kazanması veya röntgen teşhis yazılımının insandan daha başarılı iş çıkarması, makine öğrenmesi araştırmacıları için tatminkâr sonuçlar olsa da matematiksel kesinlikte neticeler değildir. İspat yapabilen makinelerin günümüzde makine öğrenmesi diye tabir edilen yöntemleri kullanarak gerçekleştirilmesi sürpriz olur. Yine de yeterince gelişmiş bir derin öğrenme yazılımının zaman ve mekân sezgilerimizi sandığımızdan çok daha mükemmel şekilde modelleyerek, homotopi tipleri kuramı gibi bir belit sisteminde insandan çok daha başarılı şekilde ispat arama ihtimalini yok sayamayız. Bu ürkütücü ihtimalin gerçekleşmesi, zaman ve mekân sezgilerimizin mahiyeti konusunda derin felsefi sorgulamalara yol açabilir.



Öte yandan, ispat arama konusunda kayda değer başarı gösterdikleri noktada, otomatik ispat programları, ileride YZ'lerin gerçekten muhakeme yapmak için kullandığı bir unsur olabilir; makine öğrenme algoritmalarıyla paralel şekilde çalışarak birbirlerini tamamlayabilirler. Bu ihtimal sebebiyle ülkemizde bu alanda çalışan bir araştırma grubunun tesisi büyük önem arz ediyor.

Sonsöz

Hakemlerin gördüğü işlerden biri, bilgisayarın sağlamasını yaptığı ispatların, yazarın makalede ifade ettiği teoremlere gerçekten tekabül ettiğini doğrulamaktır demiştik. İlk başta rutin bir iş gibi görünen bu nokta, aslında derin bir tuzak içerir. Şayet makaledeki teoremler, günlük matematik diliyle (mesela Zermelo-Fraenkel sisteminde) ifade edilmiş, ispatlar da homotopi tipleri kuramında yapılmışsa işte o zaman hakeme düşen iş, Çince bir şiirin Türkçe tercümesinin sahih olup olmadığına karar vermek gibi bir şeydir. Yani imkânsızdır. İki dil eşit güçte olsa bile, iki satırlık bir şiirin tercümesinde tüm nüansları matematiğin gerektirdiği kesinlikte ifade edebilmek için ciltler doldurmak gerekebilir. Neticede teoremleri günlük dilde ifade etmek yerine, doğrudan tipler kuramının diliyle ifade etmek daha pratik olacaktır. Galiba homotopi tipleri kuramı ve otomatik teorem sağlama alanlarında çalışanların asıl niyeti, tüm matematikçileri sezgisel tip teorisi dâhilinde çalışmaya zorlamaktır. Ancak günlük dili terk edip formel dil kullanmaya başlamak, günlük hayatın getirdiği tüm ilham, sezgi, görü gibi imkânlardan da vazgeçmek anlamına gelir. Bu sebeple matematikçilerin birçoğunun bu konuda büyük bir heyecan duyduğunu söyleyemeyiz. Otomatik teorem sağlama, bu sebeple matematikten ziyade matematiksel mantık ve bilgisayar biliminin ilgi alanına girmektedir. Şimdilik... ■

Konunun bilgisayar bilimleri tarafında beni aydınlatan Hakan Ayral'a teşekkürlerimi sunarım.

Not:

Konuyla ilgili olarak okumak isterseniz, yazımız yayına hazırladıktan sonra *Notices of American Mathematical Society* dergisinin Haziran/Temmuz 2018 sayısında Jeremy Avigad imzalı "Opinion: The Mechanization of Mathematics" makalesi de çıktı.

Kaynaklar

Nordström, B., Petersson, K. Smith, J.M. "Martin-Löf's type theory," Handbook of logic in computer science:" Cilt 5 Oxford University Press, Oxford, s. 1-38, 2001.

Nordström, B., Petersson, K., Smith, J.M. "Programming in Martin-Löf's type theory". Oxford: Oxford University Press; 1990.

Grayson, D.R. "Vladimir Voevodsky (1966-2017) Mathematician who revolutionized algebraic geometry and computer proof" *Nature*, Cilt 551, s. 169, 2017.

Voevodsky, V. "The Origins and Motivations of Univalent Foundations" *The Institute Letter*, Institute for Advanced Study, Summer 2014, s. 8-9, 2014.

Awodey, S., 2012. "Type theory and homotopy". *Epistemology versus ontology*, s.183-201. Springer, 2010.

Wikipedia ("Zermelo-Fraenkel set theory", "Proof assistant", "Automated proof checking", "Boolean Pythagorean triples prolem" makaleleri)

Oberwolfach matematik yazılımları kütüğü: https://orms.mfo.de/

Homotopi tipleri kuramı: https://homotopytypetheory.org/

Mathematics without Apologies (Blog) Michael Harris https://mathematicswithoutapologies.wordpress.com/

The Universe of Discourse (Blog), Mark Dominus https://blog.plover.com/