Ali Doğanaksoy

SERBEST STİL: BELİRSİZLİĞİN ÖLÇÜLMESİ (ENTROPİ)

Aralarından bir tanesi diğerlerinden daha ağır, geri kalanları aynı ağırlıkta top arasından ağır topu bulmaya çalıştığımızı düşünelim. 9 toptan herhangi biri ağır olabileceği için, sistem 9 farklı durumdan oluşan bir belirsizlik içerir.

Şimdi de birbirinden farklı koşu hızlarına sahip 9 yarış atının sıralamasını belirlemek istediğimizi düşünelim. Burada atların farklı hızlara sahip olmalarının yanı sıra sıralamanın da sabit olduğunu, yarıştan yarışa değişmediğini kabul ediyoruz. Atlar 9! farklı şekilde sıralanabileceği için bu sistem 9! = 362.880 farklı durumdan oluşan bir belirsizliğe sahiptir.

thinkstock

Yukarıda sözü geçen sistemlerden ikincisinin belirsizliğinin birincinin belirsizliğinden daha büyük olduğunu açıkça görebiliyoruz.

Sistemlerin belirsizliği, taşınan bilgi (enformasyon) miktarı, bilginin verimli işlenmesi, aktarılması, özetlenmesi, sıkıştırılması, saklanması gibi konuları ele alan bilim dalı enformasyon kuramıdır ve kurucusunun C. E. Shannon olduğu kabul edilir. Enformasyon kuramında sistemlerin belirsizliği için bir ölçü tanımlanır. Entropi adı verilen bu ölçü, her biri eşit olasılığa sahip n farklı durumdan oluşan bir sistem için $\log\ n$ değerine eşittir. Tanımda geçen logaritma, herhangi bir tabanda kabul edilebilir. Seçilen tabanın bir önemi olmadığı uygulamalarda anlaşılacaktır.

Başlarken tanımladığımız sistemlere geri dönecek olursak, toplardan oluşan sistemdeki entropinin log 9, atlardan oluşan sistemdeki entropinin de log 9! olduğunu görürüz.

Bundan sonra, belirsizliği gidermek için kullandığımız bilgi edinme yöntemi ön plana çıkıyor. Örneğin topların konu edildiği problemde, elimizde iki kefeli bir terazi olduğunu, kefelerden her birine istediğimiz kadar top koyabildiğimizi ve ağırlık ölçmek için toplardan başka bir nesne olmadığını kabul edelim. Her tartı işleminde muhtemel üç durumdan birini (kefelerdeki ağırlıklar A ve B olmak üzere , *A>B, A<B* veya *A=B*) belirlemiş oluruz. Bir başka deyişle *A* ve *B* ağırlıkları için üç muhtemel durum içeren sistemin belirsizliği giderildiği için, her tartı işleminde en fazla log 3 ölçüsünde belirsizlik ortadan kalkmış olur. O halde, bu yöntemle ağır topu bulabilmek için yapacağımız tartma işlemlerinin sayısı en az $\frac{\log 9}{\log 3} = \log_3 9 = 2$ olmalıdır. Burada bulduğumuz sayının, tartı işlemlerinin sayısı için bir alt sınır olduğuna dikkat etmek gereklidir. Enformasyon kuramı, bu alt sınıra eşit sayıda tartma işlemi ile sonucu elde etmeyi garanti etmez. Uygun bir strateji takip ederek bu alt sınıra eşit veya mümkün olduğunca yakın sonuçlar yakalamak bir başka problemdir. Buradaki problem için özel olarak belirtelim ki, ağır top gerçekten de tam 2 tartma işlemi ile belirlenebilir.

Atların sıralamasına gelince, her seferinde iki atı yarıştırabiliyorsak, her denemede belirsizlik en fazla log 2 ölçüsünde azalacaktır. Sonuç olarak, $\frac{\log 9!}{\log 2} = 18{,}47...$ olduğundan, her seferinde iki at yarıştırarak 9 atın dizilişini belirleyebilmek için kullanılacak en iyi stratejide en az 19 ikili yarış yapılacağı anlaşılmaktadır. Bir başka deyişle, 19 ikili karşılaştırma ile sıralama yapmayı garanti eden bir strateji bulabilirsek, daha iyisinin bulunmayacağından emin olabiliriz. 21 karşılaştırma ile atların sıralanmasını garanti eden bir yöntem olduğu bilinmektedir. 20 (veya 19) karşılaştırma ile sıralama yapmayı sağlayan bir yöntem bulabilir misiniz?

Konu hakkında daha fazla bilgi edinmek isteyen okurlarımız İhtimaliyet ve İnformasyon (*A. M. Yaglom ve I. M. Yaglom, Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul, 1966*) adlı kitabı Türk Matematik Derneği'nden temin edebilir.

thinkstock

Aralarından bir tanesi diğerlerinden daha farklı (daha az veya daha fazla) ağırlığa sahip, geri kalanı eşit ağırlıkta n tane top veriliyor. İki kefeli terazi kullanılarak ağır topun bulunabilmesi için en az kaç kez tartı işlemi uygulanacağını hesaplayalım.

Bu problemin 9 topu konu edinen örneğimizden ayrıldığı nokta, farklı olan topun daha ağır mı yoksa daha hafif mi olduğunu bilmememizdir. Bu durumda ağırlığı farklı olan top, n toptan herhangi biri olabilir (n durum) ve bu top ağır veya hafif olabilir (2 durum). Toplam $2n$ farklı durum söz konusu olduğundan, sistemin entropisi log $2n$ olacaktır. Her tartı işleminde belirsizlik en fazla log 3 azaldığından yapılacak tartı sayısı en az $\frac{\log 2n}{\log 3}$ olarak hesaplanır.

Örnek olarak, 9 top varsa, $\frac{\log 18}{\log 3} = 2{,}63...$ olduğundan, en az üç tartı gerekecektir.

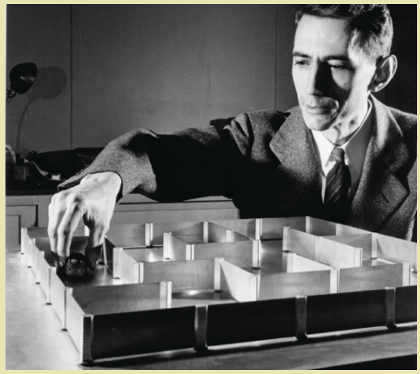
12 top için ise $\frac{\log 24}{\log 3} = 2{,}89...$ olduğundan, gereken en az tartı sayısı yine 3 olarak bulunur. 12 top için gerçekten de 3 kez tartı kullanılarak ağırlığı farklı topun bulunmasını garanti eden bir yöntem vardır. Bu yöntemi bulabilir misiniz?

13 top için de $\frac{\log 26}{\log 3} = 2{,}96...$ olduğundan en az 3 tartı işlemi gerekir. Öte yandan 13 top için tartıyı tam üç kez kullanarak ağırlığı farklı olan topun bulunmasını garanti edecek bir strateji bulunamayacağı daha detaylı bir inceleme ile ispatlanabilir.

matematik.havuzu@tubitak.gov.tr

USTA KAPTANLAR

Claude Elwood Shannon
Amerikalı matematikçi, elektronik mühendisi ve şifreleme uzmanı C. E. Shannon 30 Nisan 1916-24 Şubat 2001 tarihleri arasında yaşadı. 1937'de 21 yaşında iken Massachusetts Institute of Technology'de (MIT) yüksek lisans tezi olarak yazdığı *"Röle ve Anahtarlama Devrelerinin Sembolik Analizleri"* adlı çalışmasında elektromanyetik rölelerin Boole cebiri kullanarak basitleştirilebileceğini gösterdi. Bu sayede günümüzde kullanılan dijital bilgisayarların yapı taşı olan elektrik anahtarlarının kullanılmasının temelini attı. Bu çalışması tüm zamanların en iyi tezi olarak anılır. 1948'de yayımladığı *"İletişimin Matematiksel Kuramı"* adlı makalesinden dolayı enformasyon kuramının kurucusu olarak bilinir. II. Dünya Savaşı sırasında şifre çözümleri konusunda yaptığı çalışmalar güvenli iletişim konusunun gelişimine büyük katkı sağlamıştır. Yaptığı çalışmalar devre tasarımı, bilgisayar tasarımı, iletişim teknolojisi, biyoloji, psikoloji ve dil bilim konularında geniş uygulama alanı bulmuştur.


thinkstock

TEMEL'İN TAKASI

Geçen ay, 50 sorudan oluşan ve 5 seçenekli çoktan seçmeli bir sınavın sorularını yazı tura ile cevaplamaya çalışan Temel'in macerasına yer vermiştik.

Doğru cevap beş seçenek arasına gizlendiğinden, her soru için Temel'in en az üç kez yazı tura atması gerekir. Bu durumda Temel, sekiz farklı durumdan biriyle karşılaşabilir: (YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT). Üç kez atılan yazı turaya bir "deneme" diyelim.


thinkstock

Her denemede ortaya çıkan sekiz olası durumdan beşini, işaretleyeceği seçeneği belirlemek için kullanır; diğer üçünü geçersiz durum sayar ve denemeyi tekrar eder veya o soruyu boş bırakır. Her sekiz denemeden beşinin geçerli sayılacağını kabul edebiliriz. O halde, 50 sorunun tamamının işaretlenmesi için 80 deneme yapılması gerektiği anlaşılır ki bu da 240 kez yazı tura atılması anlamını taşır.

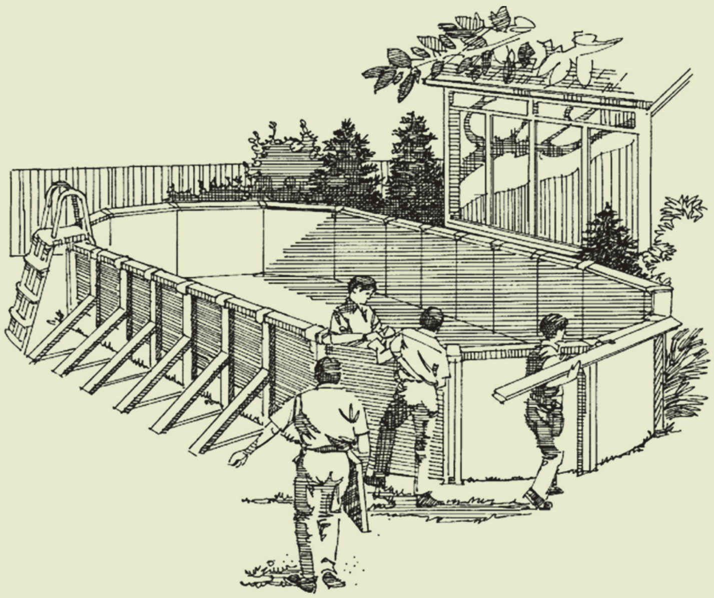
Temel biraz daha ileri bir yöntem kullanmak istediğinde, soruları üçer üçer gruplayarak cevaplandırabilir. Şöyle ki, üç sorunun doğru cevapları için olası bileşik durumların sayısı 5^3 tür. Yedi kez yazı tura atıldığında ise $2^7=128$ farklı Y-T dizilişi elde edilir. Dizilişlerden üçünü geçersiz kabul ederek, her seferinde 7 kez yazı-tura ile üç soruyu cevaplandırmış olur. Geçersiz sonuçla karşılaşma olasılığı ihmal edilebilecek kadar küçük ($\frac{3}{128} \approx 0{,}023$) olduğu için hesaba katmıyoruz. Sonuç olarak, 48 soru için $\frac{48}{3} \times 7 = 112$ ve son iki soru için de 5 kez olmak üzere, toplam 117 kez yazı-tura atarak tüm testi cevaplandırabilir.

Acaba Temel, daha az sayıda yazı tura atarak sınavı tamamlayabilir miydi? Bunu cevaplandırabilmek için Temel'in karşılaştığı sistemin entropisini hesaplayalım. Her soru için 5 seçenek olduğundan, tüm sorular bir arada ele alındığında 5^{50} eşit olasılıklı durum olduğu görülür. Sistemin entropisi $\log 5^{50} = 50 \log 5$ dir. Her yazı tura atışı belirsizliği en fazla $\log 2$ kadar azalttığından, atılacak yazı tura sayısı $\frac{50 \log 5}{\log 2} = 116{,}09...$ 'dan az olamaz. Yani Temel'in ikinci yönteminde olduğundan daha az sayıda yazı tura atarak tüm sorular cevaplandırılamaz.

İş cevapları kontrol etmeye geldiğinde ne olur? Sağlama için farklı yöntemler izlenebilir. Temel'in şu şekilde hareket ettiğini düşünelim. Birinci sınamada tüm sorular için yine 117 kez yazı tura atarak ikinci kez belirleme yapar ve ilk seferindeki ile aynı sonucu bulduğu soruları kesinleştirir; diğerleri için yeni baştan cevaplandırma/sağlama yoluna gider. İlk turda yaklaşık 10 soru kesinleşmiş olur. İkinci turda geri kalan 40 soru için cevaplandırma/sağlama amacı ile 93+93=186 kez yazı tura atılır. Benzer şekilde üçüncü turda 74+74=148 kez yazı tura atılır. Bu şekilde devam edildiğinde toplam olarak 1160 yazı turayla sınav tamamlanır. Bu durumda ilk cevaplama aşamasında 117 kez, sağlama için de 1043 kez yazı tura atılmış olur. Geçen sürenin iki saat olduğunu göz önünde bulundurduğumuzda, Temel'in bir kez yazı tura atmak için en fazla 6,2 saniye harcadığını görürüz. Sınav süresinin yaklaşık 12 dakikası cevaplandırma için, 1 saat 48 dakikası sağlama için kullanılmış olur. Sonuçta Temel'in "Cevaplandırmam çoktan bitti, şimdi sağlama yapıyorum" derken haklı olduğu anlaşılır.

Ali Doğanaksoy

EĞLENCE HAVUZU



thinkstock

ZEHİRLİ HAVUZ

Bir şehirde 1000 tane yüzme havuzu bulunmaktadır. Bu havuzlardan birinin suyuna yanlışlıkla sağlığa zararlı bir kimyasal madde karışmıştır. Diğer havuzlar temizdir. Sudaki kimyasal oranı çok düşük olsa bile sonuca ulaşabilen bir test yardımı ile kirlenmiş havuzu bulmak istiyoruz. En az kaç test yaparak bu havuzu belirleyebiliriz?

Havuzları her biri 500 havuzluk iki gruba ayırıp gruplardan birini seçelim. Seçtiğimiz gruptaki tüm havuzlardan aldığımız birer damla suyu karıştırıp test edersek, kirli havuzun hangi grupta yer aldığını belirlemiş oluruz. Sonra bu gruptaki havuzları da sayıca eşit iki gruba ayırıp benzer şekilde testi ikinci kez uygulayalım. Bu yöntemle devam ederek tam 10 test ile kirlenmiş havuzu bulabiliriz.

Problemi biraz genelleştirelim. Bir değil de iki havuzun suyuna kimyasal madde karıştığı biliniyorsa bu iki havuzu belirleyebilmek için en az kaç test yaparak sonuca gidebiliriz?

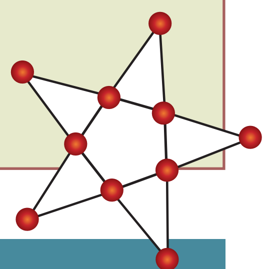
HAVUZ YAPIMI

Bir havuz inşaatında, günlük 10.000 lira bütçeyle 100 kişi çalıştırılacaktır. Ustaların gündeliği 500 lira, kalfaların gündeliği 100 lira, çırakların gündeliği 5 liradır. İnşaatta çalışacak toplam usta, kalfa ve çırak sayıları ne olur?

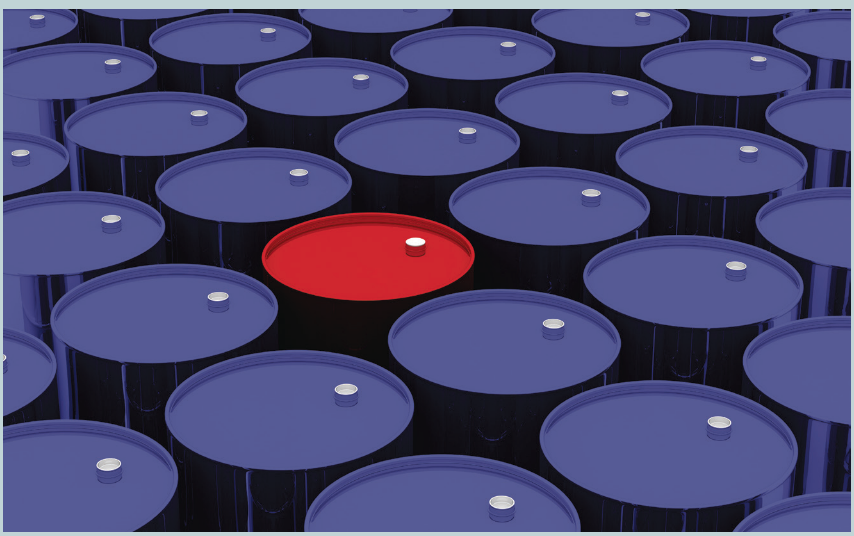
SİHİRLİ YILDIZ

1'den 10'a kadar sayıların her birini birer defa kullanarak yandaki yıldıza yerleştirmek istiyoruz. Sayıları, aynı doğru üzerindeki dört sayının toplamı hep aynı olacak şekilde yerleştirmek mümkün müdür?

Aynı oyunu {1, 2, 3, …, 12} kümesinden 10 farklı sayı seçerek oynayalım. Yukarıdaki durumdan farklı olarak, sizce bu durumda sayıları istenildiği gibi yerleştirmek mümkün müdür?



OLİMPİK HAVUZ



thinkstock

ZEHİRLİ VARİL

Kuşatılmış bir kaledeki, hepsi ağzına kadar suyla dolu 240 varilden birine çok kuvvetli bir zehir atılmıştır. Bir damlası bile bir kişiyi günlerce hasta eden bu zehirin etkisi 12 saat içinde görülmektedir. 24 saat içinde 5 gönüllü ile zehirli olan varil belirlenebilir mi?

ÇEMBERDE AÇI

k_1 ve k_2 çemberleri iki farklı A ve B noktalarında kesişiyor. İki çemberin ortak teğeti t, k_1 ve k_2'ye sırasıyla M ve N noktalarında teğettir. $|MN|=2|MA|$ ve t ile MA doğrusu dik olduğuna göre, NMB açısı kaç derecedir?

matematik.havuzu@tubitak.gov.tr

GEÇEN AYIN ÇÖZÜMLERİ

Sütlü Kahve

İlk sorunun çözümünde kaşığın büyüklüğünün bir önemi olmadığını gözlemlemiştik. Burada damlanın büyüklüğünün önemli olduğunu şöyle görebiliriz: Eğer fincanın tamamını bir kerede boşaltacak bir "damla" alırsak, istenen oran 1/2 olur. Eğer fincanın yarısını boşaltacak bir "damla" alırsak oran 2/3 olur. Peki, damla çok küçük olduğunda ne olur? Kahve fincanından alınan bir damlanın fincanın hacmine oranı $1/n$ ise, kahve fincanı yaklaşık olarak n defada boşalacaktır. İlk adımda süt fincanındaki süt oranı $n/(n+1)$ olacaktır ve n adım sonra ise $[n/(n+1)]^n$ olacaktır. n büyüdükçe bu sayı $1/e = 0{,}367$ sayısına yaklaşır.

Maksimum Çarpım

$N < 5$ için durumlar kolayca incelenir. Diğer durumlarda maksimum çarpım olabilmesi için 1 kullanılmamalıdır ve 4 ve 4'ten büyük sayılar olmamalıdır. Eğer çarpımda $k \geq 4$ *sayısı* varsa bu sayıyı $k=(k-2)+2$ ile değiştirerek çarpımı daha büyük yapabiliriz. Sonuç olarak, maksimum çarpım elde etmek için sadece 2 ve 3 kullanılmalıdır. İkiden fazla 2 varsa 2+2+2 yerine 3+3 yazıp çarpım büyütülebilir. Maksimum çarpım, mümkün olduğunca çok sayıda 3 ve bir veya iki 2 kullanılarak elde edilir.

Bayramlaşma

El sıkışma sayıları *0, 1, …, 8* olduğundan; *(n)* ile *n* kişiyle el sıkışan kişiyi gösterelim. (8)'in eşi kaç kişiyle el sıkışmıştır? Hiç kimseyle. Neden? (8) ve (8)'in el sıkıştığı insanlar, eşi dışındaki herkesi oluşturuyor. Geriye sadece (0) kalıyor. Dolayısıyla (8) ve (0) eşlerdir. Benzer şekilde (7)'nin eşinin (1) olduğu görülür. Bu mantıkla diğer çiftlerin (6)-(2) ve (5)-(3) olduğu bulunur. Geriye sadece (4) kalır, dolayısıyla eşim 4 kişiyle el sıkışmıştır.

Sihirli Matris

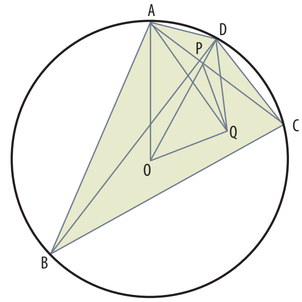
Sihirli matrisi oluşturmak hayli basit bir fikre dayanır. Matrisin ilk satırının üzerine ve ilk sütunun sol yanına rastgele sayılar yazın. Bu sayılara sihirli matrisin üreteçleri diyelim. Matristeki her sayı karşılık gelen iki üretecin toplamıdır. Daire içine alınan her sayı tam olarak bir üreteç ikilisinin toplamıdır. Dolayısıyla elde ettiğimiz toplam üreteçlerin toplamıdır. Sorumuzdaki 1. şekildeki toplam 34, 2. şekildeki ise 24'tür. Siz de kendi sihirli matrisinizi oluşturabilirsiniz.

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Dörtgende Açı

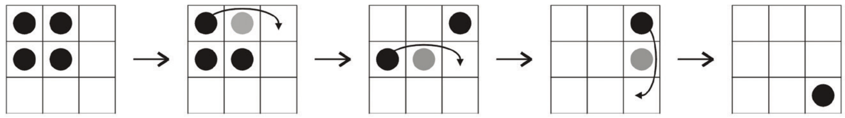
A, B, C, D çembersel olduğu için $m(AOD)/2 = m(ABD) = m(ACD)$; *A, B, P, Q* çembersel olduğu için $m(ABD) = m(ABP) = m(AQP)$; *C, D, P, Q* çembersel olduğu için $m(ACD) = m(PCD) = m(PQD)$ elde edilir. Şimdi $m(AQD)$ yi hesaplayalım: $m(AQD) = m(AQP) + m(PQD) = m(ABD) + m(ACD) = m(AOD)/2 + m(AOD)/2 = m(AOD)$.

Yani *A, O, Q, D* noktaları da çemberseldir ve buradan $m(OQA) = m(ODA)$ elde edilir. Son olarak *OAD* üçgeninin ikizkenar olduğunu da kullanarak $m(OQP)$'yi hesaplayalım: $m(OQP) = m(OQA) + m(AQP) = m(ODA) + m(AOD)/2 = 90^0$.

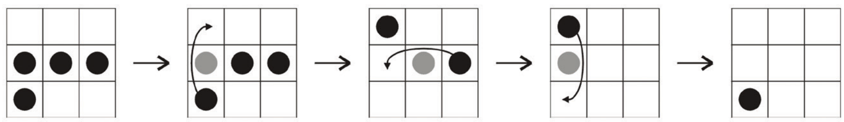


Solo Test

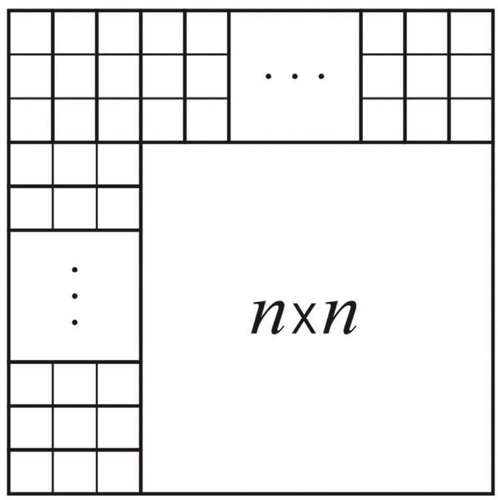
$n=1$ için oyunun bittiği açıktır. $n=2$ için şekildeki gibi oynanırsa oyun sona erer.



3x1'lik bir dikdörtgenin sol altındaki ve sol üstündeki karelerden birisi dolu diğeri boşsa dikdörtgendeki tüm taşlar şekilde gösterildiği gibi tahtadan kaldırılabilir.



Şekildeki gibi oynayarak sağ üstten başlayarak $(n+3) x(n+3)$'lük bir kare nxn'lik bir kareye dönüştürülebilir. Yani 3 ile bölünmeyen tüm n değerleri için oyun sona erer.



Şimdi $n=3k$ durumunda oyunun hiç bir zaman bitmeyeceğini gösterelim. Taşların bulunduğu koordinatların x ve y değerlerini toplayalım ve bu sayının 3 ile bölümünden kalana göre taşları sınıflandıralım. Mesela (2,4) koordinatlarındaki taş A_0 kümesinin, (6,1) koordinatlarındaki taş A_1 kümesinin, (4,4) koordinatlarındaki taş A_2 kümesinin elemanıdır. Her hamlede iki kümedeki eleman sayısı bir azalırken üçüncü kümedeki eleman sayısı bir artmaktadır. Başlangıçta her kümede $3k^2$ eleman olduğu için yapılan her hamle sonunda kümelerin ya hepsi tek ya da hepsi çift sayıda eleman içerir. Ancak oyunun bitmesi için kümelerin bir tanesinde 1 diğer ikisinde 0 eleman bulunmalıdır. Yani $n=3k$ durumunda oyun hiç bir zaman bitmez.

CANKURTARAN EKİBİ
Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygı.

thinkstock