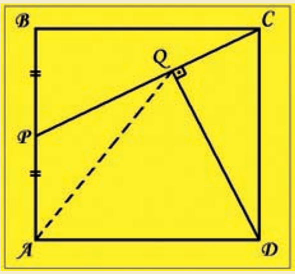
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Sayıların Efendisi

Resimdeki saygıdeğer kişi, üç asal sayının çarpımı olan A yılında doğdu. Kare bir sayı ile asal bir sayının çarpımı olan B yılında 20 yaşına bastı. İki asal sayının çarpımı olan C yılında tam 80 yaşındaydı. Dört asal sayının çarpımı ve çift bir sayı olan D yılında ise 100. yaş gününü kutladı. Bu kişinin hangi yılda doğduğunu bulabilir misiniz?

Eşit mi?

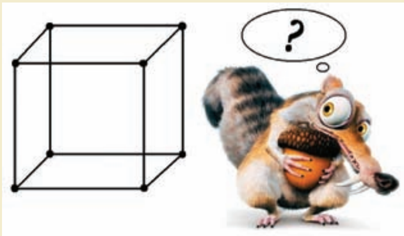
Şekildeki gibi bir ABCD karesi olsun. Bu karenin AB kenarının orta noktası olan P noktası ile C noktasını birleştirelim. Ardından oluşturduğumuz PC doğru parçasına D noktasından bir dikme indirelim. Bu durumda AQ ile AD doğru parçalarının birbirine eşit olduğunu gösterebilir misiniz?



Saklı Güzellik

Matematiğin ilk bakıştaki karmaşık görüntüsünün ardına saklanmış büyüleyici saf güzelliği bu soru sayesinde keşfedebilmeniz mümkün: $7^{1/2} + 7^{1/3} + 7^{1/4} < 7$ ile $4^{1/2} + 4^{1/3} + 4^{1/4} > 4$ eşitsizliklerinin doğruluğunu hiçbir kesirli üstel hesaplamaya ihtiyaç duymadan, son derece basit bir şekilde gösterebilirsiniz. Bu yöntemi acaba bulabilir misiniz?

Kaç Üçgen Var?



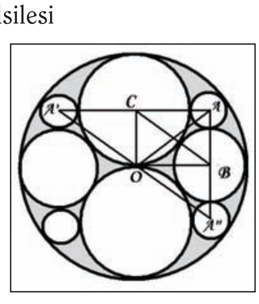
Şekildeki karenin köşelerini üçgenlerimizin de köşeleri olacak biçimde kullanarak yeni üçgenler oluşturalım. Bu şekilde toplam kaç tane üçgen oluşturabiliriz? Peki bu şekilde toplam kaç farklı üçgen oluşturabiliriz?

Geçen Ayın Çözümleri

Sihirli Sayı

N sayısını abcdef şeklinde gösterelim: $N = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$. N sayısının rakamları toplamını da S ile gösterelim: $S = a + b + c + d + e + f$. Bu durumda $N + 2N + 3N + 4N + 5N + 6N = 21N = S\text{x}111111$ olur. O halde N = S x 5291'dir. S sayısı en az 1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6 = 21 değerini alabilir. Ayrıca 6N'nin de 6 basamaklı olması için kesin a=1 olması gerekir. Yani $N \leq 198765$ ve $S \leq 37 \leq 198765/5921$'dir. Bu durumda aradığımız sonuç $21 \leq S \leq 37$ değerleri arasında olur. Birkaç deneme ile sihirli sayının 142857 olduğunu buluruz.

İlginçlikler Silsilesi

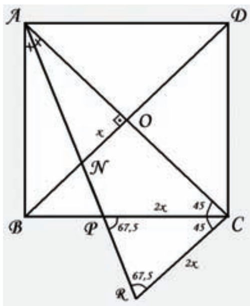


A, B ve C merkezli çemberlerin yarıçapı sırasıyla a, b ve c olsun. COB dik üçgeninde Pisagor teoremini kullanırsak $(2c-b)^2 + c^2 = (b+c)^2$ eşitliğini ve bu eşitlikten de $2c = 3b$ eşitliğini elde ederiz. Aynı şekilde ACO dik üçgeninde de $OC^2 + CA^2 = OA^2$ eşitliği bulunur. $c^2 + (c+a)^2 = (2c-a)^2$ eşitliğinden $c = 3a$ elde edilir. Bu sayede a:b:c oranının 1:2:3 olduğu ispat edilmiş olur. Bu oranlar kullanılarak da 3-4-5 üçgenleri rahatlıkla gösterilebilir.

Teknolojiden Uzak

Sorunun aslında püf noktası şu eşitlikleri yazabilmekte: $\log_5 49 = \log_{10} 49/\log_{10} 5$ ve $\log_7 125 = \log_{10} 125/\log_{10} 7$. Sonuca ulaşmak için geriye sadece bir iki çarpma-bölme işlemi kalıyor:

Kesişim

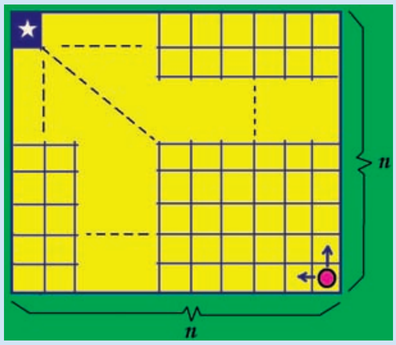


Şekildeki gibi AP doğru parçasını uzatarak BD'ye paralel olan CR ile kesiştirelim. ON//CR olduğu için aslında AON ile benzer olan ACR üçgenini yaratmış olduk. PAC açısı 22,5° olduğu için PRC açısı da 90 – 22,5 = 67,5° olur. BCR açısı 90/2 = 45° olmalıdır. O halde CPR açısı da 67,5° olur. Bu sayede CPR üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu bulduk. Demek ki soruda sorulan PC = 2x17 = 34 birimdir.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Şansın Matematiği-2

Geçen ay yayınladığımız yazımızın devamına geçmeden önce dilerseniz yeni okuyucularımız için küçük bir özet yapalım. Yazıdaki amacımız n x n'lik satranç tahtasında oynanan ve kurallarını açıkladığımız oyundaki kazanma şansımızı bulmaktı. Bahsettiğimiz oyun, kuralları açısından son derece basit bir oyun. Oyuna başlamadan önce pulumuzu en sağ alttaki kareye yerleştiriyoruz. Daha sonra oyuna başlamak için herhangi bir madeni parayı havaya atıyoruz. Yazı gelmesi durumunda pulumuzu 1 kare yukarıya, tura gelmesi durumunda ise bir kare sola kaydırıyoruz. Bu şekilde n x n'lik tahta sınırlarını aşmadan pulumuzu en sol üst kareye taşımaya çalışıyoruz. Geçen ay 3 x 3'lük tahta için kazanma şansımızı hesapladığımızda 3/8 olduğunu bulmuştuk. Peki n x n'lik tahtada bu oyunu oynarsak kazanma şansımız ne olur?



Sonuca ulaşabilmemiz için öncelikle sağ alt köşeden sol üst köşeye kaç farklı yolun olduğunu bulmamız gerekiyor. Başlangıç noktasından kazanmamızı sağlayacak sol üst köşeye gidebilmek için tam olarak (n-1) kere sola ve (n-1) kere yukarıya gitmemiz gerekir. Toplam 2n-2 hamlemizin (n-1)'i sol, (n-1)'i yukarı olması şartıyla bunların hangi sırada gerçekleşeceğinin önemi olmaması sebebiyle tekrarlı permütasyon formülünü kullanabiliriz. O halde n x n'lik tahtada kazanmamızı sağlayacak toplam yol sayısı aşağıdaki gibi olur:

Şimdi artık yapmamız gereken, toplam sayısını bulduğumuz her bir yolun gerçekleşme olasılığını bulmak. Attığımız madeni paranın hilesiz olduğunu kabul ettiğimiz için P(tura) = P(yazı) = 1/2 olur. Her bir zafer yolu, (2n-2) hamle ve bunun karşılığında 2n-2 para atışını içerdiğine göre belirli bir yolun gerçekleşme olasılığı $1/2^{(2n-2)}$ 'dir. Artık sonuca ulaşmak için son hamlemizi yapabiliriz. n x n'lik tahtada kazanma olasılığımız, bizi zafere götüren toplam yol sayısı ile her bir yolun gerçekleşme olasılığının çarpımına eşittir:

Bu formül sayesinde artık oyuna başlamadan önce kazanma olasılığınızı (ya da rakibinizin kazanma olasılığını) hesap edebilirsiniz.