



Sıfıra Saygılarla

Matemanya köşemizde, sıfırın marifetleri ile ilgili birçok kez yazdık.

En sık yazdığımız konu, "sıfıra bölme numarası" ile elde edilen şaşırtıcı aritmetik göz bağıcılıkları oldu. Bunları yeniden sıralayacak değilim. Ancak arkadaşlarına şaka yapmak, onları şaşırtmak isteyenler eski sayılarımızda bu konuda yazdıklarımızı bulup eğlenebilir. Yazdıklarımız içinde olmayan ve ilk duyduğumuzda bize tuhaf gelen, hatta "yok canım, bu kadar da olmaz" dedirten bir sıfır tuhaflığından söz edeceğiz:

0!=1

Önce, faktöriyel konusuna yabancı olanlar için, neden faktöriyel diye bir işlem tanımlıyoruz, kısaca bahsedelim: Diyelim ki elimizde 3 rakam var: 4, 7 ve 9. Acaba bu üç rakam ile kaç değişik üç basamaklı sayı yazabiliriz? İşin mantığı aşağı yukarı şöyle: İlk olarak rakamlardan birini ele alıyoruz. Bu rakam diyelim 4 olsun. 4, üç basamaklı bir sayının basamaklarından herhangi birine yerleştirilebilir. Yani 3 seçeneğimiz var. İkinci rakamı ele aldığımızda, örneğin 9'u, üç basamaklı sayının bir basamağı daha önceden 4 tarafından doldurulmuş olacağından, sadece 2 seçeneğimiz var. Sonuncu rakam, yani 7 ise ancak 1 seçeneekli olacaktır. Çünkü 2 basamak daha önce 4 ve 9 tarafından doldurulmuştur.

Bu durumda toplam seçeneklerimiz $3.2.1=6$ tane olmalıdır. İşte göstereyim:

4 - -
- 4 -
- - 4

İlk yerleştirmeden sonra ikinci rakam için her sayıda sadece 2 boş yer kaldı;

4 9 -
4 - 9
9 4 -
- 4 9
9 - 4
- 9 4

İkinci rakam yerleştirilince ise, üçüncü rakam için her sayıda sadece 1 boş yer kaldı;

4 9 7
4 7 9
9 4 7
7 4 9
9 7 4
7 9 4

Böylece 6 rakamı da tamamladık. Burada verdiğim basit örnekte ilk aşamada 3, ikincide 2 ve sonuncuda da 1 seçenek, bize $3 \times 2 \times 1 = 6$ sonucunu veriyor ve bu sayıya kısaca 3! diyoruz. Eğer seçtiğimiz 3 rakam yerine örneğin 8 rakam seçseydik, toplam seçenekleri bulmak için sırasıyla 8,7,6,5,4,3,2,1 adet seçenekleri yerleştirip toplamda $8! = 40.320$ seçenek bulacaktık.

Faktöriyel işte bu tür matematiksel gereksinimleri karşılarsın diye tanımlanmıştır. Aslında $0! = 1$ sonucunu matematiksel olarak göstermek zor değil. Ancak anlam olarak anlaşılır gibi durmuyor. Biliyorsunuz, faktöryel, doğal sayılar kümesinde tarif edilmiş bir işlemdir. N! dediğimizde, 1'den başlayarak N sayısına kadar olan sayıların birbirleriyle çarpılmalarını kastederiz. Örneğin $5! = 1.2.3.4.5$.

Biraz önce anlattığım tanımdan yola çıkarsak $0!$ pek anlamlı durmuyor. 1'den başlayıp 0'a kadar olan sayıların birbirleriyle çarpılması mı diyeceğiz yani? Faktöryel tanımının vazgeçilmezi, hangi sayının faktöryelini alıyorsanız, en sonunda çarpan olarak o sayının gelmesidir. Örneğimizde 5 sayısının gelmiş olması gibi. O halde, $0!$ içinde 0 sayısını çarpan olarak taşımaları değil midir?

Biliriz ki 0 nerede ve ne zaman çarpan olarak bulunsa, sonuç daima sıfır çıkar. Sonlu ne kadar büyük sayı olursa olsun, sıfır ile çarpılınca, gerçekten çarpılır, sonuç sıfıra eşit olur. Neden o halde $0! = 1$ gibi bir tuhaflıkla karşı karşıyayız? Önce matematiksel olarak, $0! = 1$ olduğunu göstereyim isterseniz: Bilirsiniz $(n-1)! = n!/n$ demektir. Örneğin $4! = 5!/5 = 1.2.3.4.5/5 = 1.2.3.4$. Bu, faktöriyel tanımımızdan otomatik olarak çıkar. O halde $(1-1)! = 1!/1 = 1 = 0!$ olarak bulunabilir. Basit yani. Anlaması da gösterilmesi de! Doğrusunu isterseniz size $0! = 1$ sonucunun sezgilerimizi rahatlatan bir açıklamasını veremeyeceğim. Ancak, bu sonucun neden önemli olduğunu anlatabilirim:

Diyelim ki bu yıl Türkiye Kupası'na 24 takım katılma hakkı elde etti. Bu takımları 4'erli gruplara ayırıp, iki devreli lig usulüyle ilk tur elemelerini yapmak istiyorsunuz. Acaba 24 takım 4'erli kaç değişik gruba ayrılabilir? Matematikçiler buna birleşim (kombinasyon) der. 24'ün 4'erli birleşimleri. İşaret olarak da $C(24,4)$ olarak gösterirler. Uzun uzun anlatmamak için hemen sonucunu yazayım: $C(24,4) = 24! / (24-4)!4!$ Peki acaba 24 takımın olduğu bir ligde 24 takımlı kaç grup olurdu diye sorsam soruyu? Kolay değil mi? Sadece 1 grup. Yani $C(24,24) = 1 = 24! / (24-24)!24! = 1/0! = 1/1 = 1$ Tuhaflımıza gitse de, sıfır faktöriyel sevimli bir süper kahramandır. Sıfırın kendisi gibi. Sıfırın şifresi işte. Sevgiyle kalın.