ASAL SAYILAR

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [*Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü*

Sanatçı arkadaşlarımla konuşurken
konuyu sayılara getirmeye bayılırım.
Yeni yıla girerken yine böyle
bir sohbette "2017 asal bir sayı.
Bu yıl özel olacak" dedim.
Sanatçı arkadaşım "Asal sayı nedir?" dedi.
Bunu zaten bekliyordum,
hemen açıkladım
"Başka hiçbir sayıya bölünemeyen
sayılara asal sayı denir" dedim.
"Örneğin 2017 sayısını 2'ye bölemezsin."
Gözleri bir an kısıldı, "Ben böldüm.
Niye bölünmüyor diyorsun?" dedi.
Tam pırıl pırıl bir zekâ,
olağanüstü bir yetenek nasıl olur da
bu konuda takılır diyecekken
"bölmek" dediğimizde
ikimizin farklı şeyler düşündüğünü
fark ettim. Matematikçilerin
"bölünür" derken "kalansız bölünür"
demek istediğini, bizim
örneğimizde 2017 sayısının
sadece kendisine ve 1'e kalansız
bölünebileceğini açıkladım.
Bu özelliğe sahip
tam sayılara asal sayı dendiğini
heyecanla anlattım.

Benim çocuksu heyecanımı
bir süre sabırla izledikten sonra sordu
"Peki ama ne önemi var
bazı sayılara asal demenin?"

Bu yazıyı yazmaya
işte o zaman karar verdim.

Asal Sayı Nedir

Tam sayı deyince

1, 2, 3, 4, 5, …

gibi "sayma" sayılarını düşünürüz. Bazen bunlara doğal sayı da deriz. Felsefi nedenlerle ya da kişisel kaprislerle 0 sayısına bazen doğal deriz bazen demeyiz. Bu konuyu matematikçiler aralarında bir sonuca ulaştırınca ben size bildiririm. Şimdilik aksi söylenmedikçe 0'dan biraz uzak duralım.

Her tam sayı kendisine ve 1'e kalansız olarak bölünür. Pek çok tam sayı başka tam sayılara da kalansız bölünebilirken bazı sayılar kendisinden ve 1'den başka sayıları bölen olarak kabul etmez. İşte o inatçı sayılara asal sayı deriz. İlk on beş asal sayı şunlardır:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47

Burada ilk dikkat çeken ayrıntı 1'in bu listede olmayışıdır. Oysa o da kendinden ve 1'den başka tam sayıya kalansız olarak bölünmüyor. Bu listeye alınmaması matematikçilerin kendi aralarında aldığı bir kararın sonucudur. Nasıl ki Plüton bir kararla gezegen oluyor sonra başka bir kararla gezegen olmaktan çıkarılıyorsa 1 sayısı da çok önceden alınan böyle bir kararla artık asal sayılar listesine dâhil edilmiyor. Şimdilik bu karara saygı duyalım. Az sonra bunun ne kadar yerinde bir karar olduğunu göreceğiz.

Asal Çarpanlar

Asal olmayan tam sayılara bileşik sayı deriz. Her bileşik sayıyı asal sayıların çarpımı şeklinde yazabiliriz ve bu yazılış biçimi tektir.

Örneğin: 93=3x31

şeklinde yazılır ve 3'le 31'in yer değiştirmesi dışında 93'ün asalların çarpımı şeklinde başka bir yazılımı yoktur. Eğer 1'i de asal kabul etseydik,

o zaman

93=3x31=1x3x31=

1^2x3x31= 1^3x3x31= ...

yazabilecektik. Bu da 93'ün birbirinden anlamca farklı olmayan ama şeklen farklı sonsuz şekilde asal çarpanlara ayrıldığını gösterecekti. Çarpanlar arasına 1'i sokmakla yeni bir bilgi elde etmediğimiz için matematikçiler oy birliğiyle 1'i asal olmaktan azletmiştir.

Her tam sayı ya kendisi asaldır ya da asalların çarpımı şeklinde yazılabilir. Öyleyse tüm asalları bilirsek tüm sayıları bilmiş olacağız!

Kaç Tane Asal Sayı Var?

Asal sayılar hakkında sadece yukarıdaki bilgilere sahip olduğumuzu düşünelim. Sadece 2 sayısının asal olduğunu hesaplamış olsak ve tembelliğimizden başka asal sayı var mı diye bakmamış olsak bile sonsuz tane asal sayı olması gerektiğini bilebiliriz. Bunu ilk fark eden kişi Öklid olmuştur.

Öklid'e göre eğer sonlu sayıda asal sayı içeren bir liste alırsak mutlaka bu listede olmayan başka bir asal sayının var olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda tüm asal sayılar kümesi sonlu bir küme olamaz.

Öklid'in bugün hâlâ güzelliğini koruyan akıl yürütmesi çok kısadır. İlk önce en az bir asal sayı içeren sonlu bir asal sayı listemiz olduğunu düşünelim. Bu listedeki tüm asalları çarpalım ve çıkan sayıya 1 ekleyelim. Bu bulduğumuz sayı listemizdeki asalların hepsinden büyük olduğu için kendisi bu listede değil. Öte yandan elde ettiğimiz bu sayı listemizdeki asalların her birine bölündüğünde daima 1 kalanını verecek. Demek ki bu sayı ya kendisi asaldır ya da listemizde olmayan bir başka asal sayıya bölünür. Böylece listemizde olmayan bir başka asalın var olması gerektiğini gördük.

Sonsuz tane asal olması gerektiği sonucuna ne kadar az emekle vardığımıza dikkatinizi çekmek isterim. İlk önce sadece 2 sayısının asal olduğunu gördük. Sonra her sayının ya kendisinin asal olacağını ya da bir başka asalın onu bölmesi gerektiğini gördük. Bu kadarcık bilgiyle yola çıkıp bu asal dediğimiz sayılardan sonsuz tane olması gerektiğini bulduk.

Matematik dünyasına
hoş geldiniz!

Komşu Asallar

Birbirini takip eden asallar arasında en az ve en çok ne kadar aralık olur sorusu asallarla ilgilenmeye başlayınca ilk akla gelen sorulardan biridir.

İlk önce iki ardışık asalın birbirinden ne kadar uzak olabileceği sorusuyla ilgilenelim, çünkü o soruyu cevaplamak daha kolay.

Bir sayı tutun. Aralarındaki fark tuttuğunuz o sayıdan daha fazla olan iki ardışık asal mutlaka vardır. Örneğin 5 sayısını tutmuş olun. Ardışık beş tane bileşik sayı yazacağız.

722, 723, 724, 725, 726

Bu sayılar sırasıyla 2, 3, 4, 5 ve 6 ile bölünür. Demek ki 722'den küçük ilk asalla 726'dan büyük ilk asal arasında en az beş fark var. Gerçekten de aralarında bu sayılar olan asallar 719 ve 727'dir ve aralarındaki fark beşten büyüktür.

Burada 722 sayısını bulmak için önce 1x2x3x4x5x6=720 sayısını buldum. Yukardaki sayıları şimdi şöyle yazabiliriz.

1x2x3x4x5x6+2, 1x2x3x4x5x6+3,
1x2x3x4x5x6+4, 1x2x3x4x5x6+5,
1x2x3x4x5x6+6

Hiç hesap yapmadan, sadece gözümüzle takip ederek ilk sayıyı oluşturan iki parçanın da 2'ye bölündüğünü, ikinci sayıyı oluşturan iki parçanın da 3'e bölündüğünü (ve bu böyle devam eder) görürüz.

1x2x3x4x5x6 sayısını kısaca 6! olarak yazarız. Şimdi 5 yerine çok daha büyük bir sayı tutalım ve bu sayıya N diyelim.

(N+1)!=1x2x3x ··· x(N+1) sayısının 2, 3, ..., N+1 sayılarına kalansız bölünebildiğini açıkça görüyoruz.

Bu durumda

(N+1)!+2, (N+!)!+3, ...,
(N+1)!+(N+1)

sayılarının sırasıyla 2, 3, ... , N+1 ile bölündüğünü, dolayısıyla hiç birinin asal olmadığını yine gözümüzle kontrol ederek hiç işlem yapmadan görürüz. Bu durumda (N+1)!+2 sayısından önce gelen ilk asal sayıya p, (N+1)!+(N+1) sayısından sonra gelen ilk asal sayıya q dersek q-p>N

bulduk. Demek ki hiçbir asala rastlamadan ilerleyeceğimiz, istediğimiz uzunlukta sayı aralıkları vardır. Buna rağmen asalların sonsuz tane olduğunu hatırlayalım. Asallar hem çoklar hem de birbirlerinden istenildiği kadar uzak olabiliyorlar.

Ama her sayı ile o sayının iki katı arasında da mutlaka en az bir asal sayı bulunur.

Buna göre eğer p asal bir sayıysa bir sonraki asal sayı mutlaka 2p'den küçük olacaktır. Eğer bu teoremi başta bilseydik asalların sonsuz tane olacağını Öklid'in yardımı olmadan hemen söyleyebilirdik. Ama tarihin akışına uyduk: Öklid MÖ 5. yüzyılda yaşamış, bu teorem ise ancak 19. yüzyılda kanıtlanabilmiştir.

İkiz Asallar

Asal sayılar listesinin başında 2 sayısını görüyoruz. Onun dışındaki tüm asal sayılar tek sayıdır. Asal sayıları ilgilendiren sonuçlar genellikle 2 için farklı, diğer asallar için farklı olur. Biz de şimdi 2 dışındaki asallara baktığımız zaman bazılarının birbirine çok yakın olduğunu görürüz.

Örneğin: (3,5),(5,7),(11,13),(17,19).

Aralarındaki fark yalnızca 2 olan bu asal çiftlerine ikiz asallar denir. Çok büyük ikiz asallar vardır. Bilinen en büyük ikiz asalların her birinin 388.342 basamağı vardır. Daha büyüğü bilinmiyor, ama yine de ikiz asallardan sonsuz tane olduğu düşünülüyor. İkiz Asal Sanısı sonsuz tane ikiz asal olacağını iddia eder ve bu konu pek çok araştırmacının üzerinde çalıştığı bir konudur.

Hem sonsuz tane asal sayı var, hem aralarında istediğimiz kadar uzaklık olan asallar bulabiliyoruz ama bu uzaklık bir önceki asalın iki katından fazla olmuyor, hem de aralarındaki fark sadece 2 olan asallar var ve biz o ikiz asallardan sonsuz tane olup olmadığını henüz bilmiyoruz.

Asal sayılar matematik dünyasının, hani o şarkıda dendiği gibi "kovaladıkça kaçan ateş böcekleridir".

Eratosthenes Kalburu

Eratosthenes MÖ 200'lü yıllarda yaşamıştır. Dünya'nın yuvarlak olduğunu ileri sürmüş hatta değişik yerlerdeki iki çubuğun gölgelerinin uzunluğunu ve bu çubuklar arasındaki mesafeyi ölçerek Dünya'nın çapını hesaplamıştır. Asal sayılara da ilgi duymuş ve bugün hâlâ asal sayı bulmak için en kolay yol olan meşhur "kalbur" yöntemini ortaya atmıştır. Kendi adıyla anılan bu yöntem şöyle çalışır.

Tüm tam sayıları 2'den başlamak üzere yan yana yazın. O kadar zamanınız yoksa sabrınızın yettiği bir yere kadar yazın. O durumda aşağıdaki yöntemi uyguladığınızda sadece o yazdığınız yere kadar olan asal sayıları bulacaksınız.

2 sayısını daire içine alın ve 2'nin katı olan tüm sayıların üzerine birer çarpı koyun. Sonra geri gelip işaretlenmemiş ilk sayıyı bulun. Bu durumda bu sayı 3 olacak. 3 sayısını bir daire içine alın ve 3'ün katları olan tüm sayıların üzerine bir çarpı koyun. Böylece her seferinde geri gelip işaretlenmemiş ilk sayıyı daire içine alıp onun katlarının üzerine çarpı koyacaksınız. Bu işlem bittiğinde daire içine alınmış sayılar asal sayılar olacak ve tüm asal sayılar böylece bulunmuş olacak.

Asal olmayan sayıları eleyip asal olanları üstte bıraktığı için bu yönteme kalbur yöntemi denir. Bu yöntemle tüm asal sayıları bulabiliriz, ama onları saklamak için sonsuz yerimiz olmadığı için ancak sonlu sayıda asal sayıyı bilgisayarlarda saklayabiliriz ve verilen bir sayı asal mı değil mi diye merak ettiğimizde o listeye başvurabiliriz.

Eratosthenes kalburu yöntemiyle
100'den küçük asal sayıların bulunması

Listeye alamadığımız çok daha büyük sayıların asal olup olmadığını anlamak için bölenleri olup olmadığını denemekten başka bir çaremiz henüz yok.

İnternet alışveriş siteleri ve elektronik bankacılık sistemleri, verilen bir sayının çarpanlarının kolay kolay bulunamayacağı gerçeğini güvenlik için kullanır. Örneğin verilen sayı 150 ise hemen çarpanlarını bulabilirsiniz. Ama eğer verilen sayı 150 basamaklıysa en hızlı bilgisayarlarla bile Güneş'in kalan ömrü içinde o sayının çarpanlarını bulamazsınız. Asal sayıların şifreleme tekniklerinde kullanılmasının sebebi işte budur, ama şimdilik bu konuya girmeyelim.

Asal Sayılar Teoremi

Asal sayıların hangi kurala göre tam sayıların içine dağıldığını anlamamız henüz mümkün değil. Bize sanki rastgele dağılmışlar gibi görünüyor. Kesin cebirsel ifadelerden umudumuzu kesince analitik yaklaşımlarla asal sayıların davranışlarını tarif edebilir miyiz diye düşünmeye başlıyoruz.

Analitik yaklaşımlar genellikle asimptotiktir. Yani eğer 1'den n tam sayısına kadar olan asal sayılarla ilgili bir kuralı analitik olarak söylüyorsak bu kural ancak n sonsuza giderken doğru olacaktır. Örneğin 1'den n tam sayısına kadar olan asalları incelersek ortalama olarak her log n sayıdan birinin asal olduğunu gözleriz. Eğer 1'den n tam sayısına kadar kaç tane asal olduğunu $\pi(n)$ ile gösterirsek

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$$

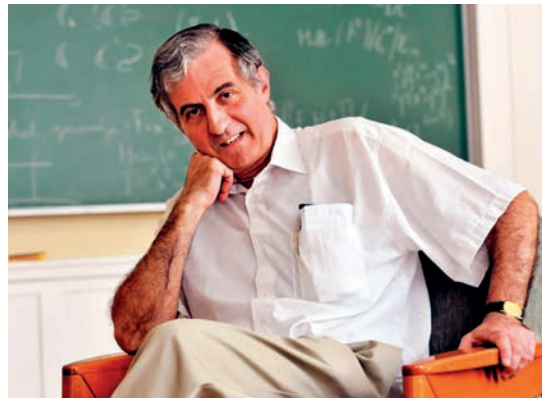
olur diye umut ederiz. Buradaki ~ işareti "aşağı yukarı aynı" anlamındadır. Çok büyük n sayıları kullanarak iki tarafı da hesaplarsak iki taraf arasındaki farkın n sayısına oranının küçük olduğunu görürüz. Burada dikkat edilecek şey, iki taraf arasındaki farkın n büyüdükçe büyümesi ama bu farkı n'e böldüğümüz zaman çok küçük sayılar elde etmemizdir.

Kısacası n sonsuza giderken yukarıdaki ifadede yer alan "aşağı yukarı aynı" iddiası "aynı" iddiasına dönüşür. Bu ise sayılar kuramının meşhur Asal Sayı Teoremi'dir ve ancak yüz yıl önce, Öklid'den iki bin beş yüz yıl sonra kanıtlanmıştır.

Asallar Arasındaki Boşluklar

Verilen herhangi bir n tam sayısından küçük iki ardışık asal arasındaki ortalama farkın log(n) olduğunu gözledik. Bazı asallar arasındaki farkın bu ortalamadan az, bazılarının ise fazla olması normal. Acaba bu ortalama farkın milyonda bir küçüklüğünde farka sahip ardışık asallar bulabilir miyiz?

Ne aradığımızı açık bir şekilde yazalım. Biraz önce "milyonda bir" derken sadece küçük bir sayı ileri sürmek istiyorduk. Herkesin küçük sayı kavramı kendine göre değişeceği için biz bu küçük sayı için c sembolünü kullanalım. Herkes sonra c yerine kendi istediği küçüklükte bir sayı yazabilir. Şimdi bir p asal sayısı arıyoruz, öyle ki ona yakın bir q asal sayısı olsun ve p ile q sayılarının farkı c log p sayısından küçük olsun.



Janos Pintz, Yalçın Yıldırım ve Daniel Goldston'un teoremlerini tamamlamak için takıma katılan Macar matematikçi.

Cole ödül töreni.
Daniel Goldston kürsüde. Yitang Zhang arkada.
Önde Cem Yalçın Yıldırım
(Fotoğraf: Amerikan Matematik Derneği)

Elbette böyle bir p asalı bulunca yetinmiyoruz, başka var mı diye de bakıyoruz. Hatta sonsuz tane bunlardan bulabilir miyiz diye soruyoruz. Problemi ilginç yapan özelliği, bir kere c sayısını sabitledikten sonra istediğimiz özelliklerdeki p ve q asallarından sonsuz tane olup olmadığını sormasıdır.

Bu problem üzerine üç ülkeden üç matematikçi beraber çalıştı. ABD'den Daniel Goldston, Macaristan'dan Janos Pintz ve Türkiye'den

Cem Yalçın Yıldırım, Boğaziçi Üniversitesinde çalışmalarını sürdürmektedir.

Cem Yalçın Yıldırım. Bu matematikçiler yukardaki sorunun cevabının "evet" olduğunu gösterdikleri çalışma sonunda 2014'de Amerikan Matematik Derneği'nin en saygın ödüllerinden olan Cole Cebir Ödülü'nü kazandılar.

Neye Niyet Neye Kısmet

Yalçın Yıldırım ve arkadaşlarının bulduğu sonuç büyük heyecan yaratmıştı, çünkü aralarındaki fark önceden tarif edilen şartlara uyan sonsuz tane asal sayı çifti olduğu ilk kez gösteriliyordu. Ama bu çiftler büyüdükçe aralarındaki fark, her ne kadar Yalçın ve arkadaşlarının koyduğu şartlara uyuyorsa da artıyordu, çünkü p ve q asalları arasındaki fark log p sayısına bağlıydı ve bu sayı da büyüyordu. Sonucu yine de "muhteşem" yapan kısım bu log p sayısını baştan belirlediğimiz ve istediğimiz küçüklükte seçtiğimiz bir c sayısıyla çarptığımız zaman bile, aranan yakınlıkta sonsuz asal çifti olduğunu kanıtlamasıydı.

Yalçınların bulduğu sonuçtan sonra İkiz Asallar Sanısı için umutlar arttı. Aralarındaki fark 2 olan sonsuz tane asal sayı çifti bulunabilir mi? Hatta biraz alçak gönüllülük yapıp bu 2 sayısından da vazgeçtik. İki yerine başka sayı da olsa razıydık. Örneğin aralarındaki fark 10'dan fazla olmayan sonsuz tane p ve q asal sayı çifti olduğunu bilebilsek, bu bile heyecandan günlerce uyuyamamamıza neden olabilirdi. Hepimizin ustası Euler insan aklının asal sayılar dünyasının sırlarına muhtemelen hiçbir zaman vakıf olamayacağını söylemişti. Ölmeden bu sır perdesinin biraz olsun aralandığını görebilecek miydik? Hadi 10 olmasın da biraz daha büyük olsun aradaki fark. Ona da razıydık.

Matematikte Külkedisi Masalı

Doktora tezinde hocasının daha önce bulduğu bazı sonuçların yanlış olduğunu göstermiş olması mezuniyetinden sonra iş bulmak için hocasından referans mektubu almasını zora sokmuştu. Kendi ifadesine göre hocası referans yazmayacağını açıkça söylemiş, hocasının ifadesine göre ise Yitang Zhang kendisine referans mektubu istemek için hiç gelmemişti.

Ailesi Çin'de olduğundan, mezun olduğu için de artık bursu ve ABD'de kalacak yeri olmadığından başlarda otomobilinde uyudu. Lokantaların evlere servis bölümlerinde çalıştı. Motel resepsiyonlarında çalıştı. Metroda sandviç sattı. Sekiz yıl akademik dünyada iş aradıktan sonra ABD'nin taşrası olarak nitelendirebileceğimiz bir eyalet üniversitesinde okutman olarak iş buldu. Okutmanların iyi ders vermesi istenir ama araştırma yapmaları beklenmez. Yitang Zhang okutmanlık pozisyonunun sağladığı stresten uzak ortamı sayılar kuramı üzerine kendi kendine araştırma yaparak değerlendirdi. On beş yıl sonra matematik dünyasına bomba gibi düşen bir teoremle ortaya çıktı.

Yitang Zhang, meşhur teoremini bulduktan sonra bir konuşmada

Yitang Zhang aralarındaki fark yetmiş milyondan fazla olmayan sonsuz tane asal sayı çifti bulunacağını göstermişti. Az önce aralarındaki fark en fazla 10 olan sonsuz tane asal sayı çifti var mı diye soruyorduk. Bu fark 10'dan biraz büyük olsa da razıyız diyorduk. Zhang bu farkı yetmiş milyon olarak gösterince bir an burun kıvırır gibi olduk. Sonra birden fark ettik ki tarihte ilk defa aralarındaki farkın önceden sabitlendiği asal sayı çiftlerinden sonsuz tane olduğu gösteriliyordu. Ölmeden bunu da görmüştük!

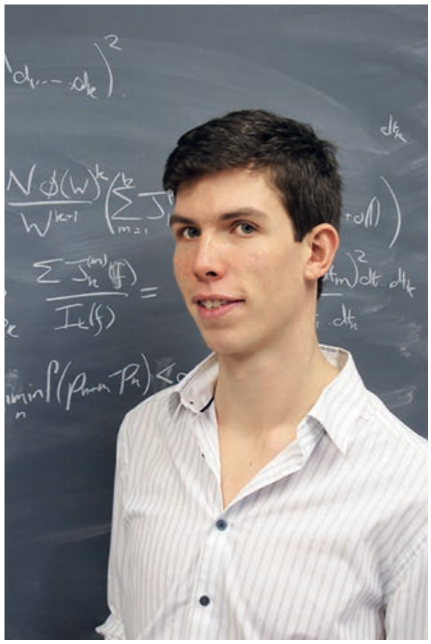
Zhang'ın makalesinin yaz başında yayımlanmasının ardından üniversitesi güz dönemi başlamadan Zhang'ı derhal akademik kadroya profesör olarak atadı. ABD'nin önde gelen büyük üniversiteleri de Zhang'a profesörlük teklif etti. Bu teklifleri yapanlar Zhang'ın kaç makale yazdığına değil yazdığı bir makalede ne yazdığına bakıyordu.

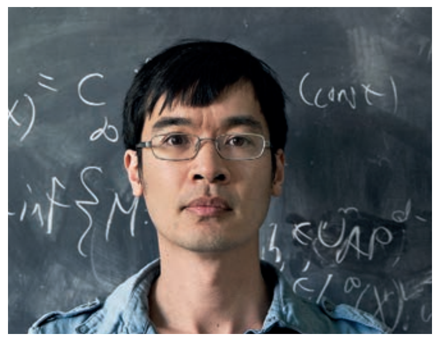
Yitang Zhang 2014 Cole Cebir Ödülü'nü Yalçın ve arkadaşlarıyla paylaştı. Yarım milyon doları aşan ödül miktarıyla ve saygınlığıyla önem taşıyan MacArthur Ödülü'nü aldı. Yüz küsur makale yazmamış olmasına rağmen, sadece tek bir makalesiyle bu ödülleri aldı. Çünkü önemli olan makale üzerine makale üretmek değil, bilim üretmektir.

Yitang Zhang şimdi aşağıda fotoğrafı görülen, Pasifik Okyanusu kıyılarında muhteşem bir kampüsü olan Santa Barbara Üniversitesi'nde araştırmalarına devam ediyor.

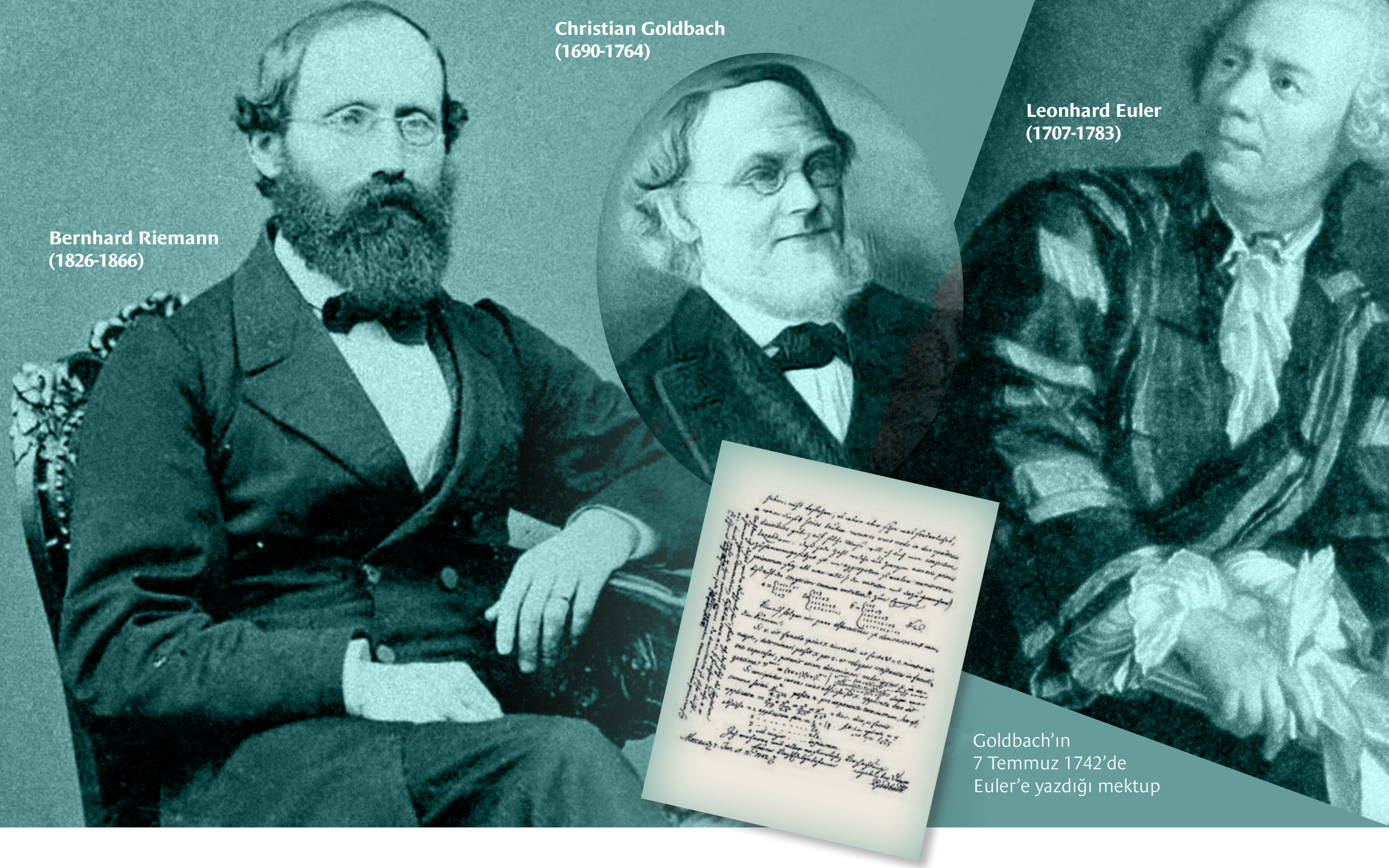
Yetmiş Milyon Çok Geldiyse

Evet, bazılarımıza yetmiş milyon çok gelmişti. Zhang'ın çalışmasının yayımlandığı sıralarda Yalçınların çalışmalarını başka bir açıdan değerlendiren yeni mezun bir matematikçi, James Maynard, Zhang'ın yetmiş milyon olarak bulduğu sınırlamayı birdenbire 600'e indirdi.





James Maynard, ardışık asallar arasındaki farkın 600'e indirilebileceğini gösterdi (solda). Matematiğin Mozart'ı olarak bilinen **Terence Tao**'nun (sağda) ardışık asallar arasındaki farkı 246'ya indiren Polymath8 projesinde elde ettiği sonuçları https://terrytao.wordpress.com/tag/polymath8/ adresindeki blog'unda okuyabilirsiniz.



Goldbach'ın 7 Temmuz 1742'de Euler'e yazdığı mektup

Dünyanın değişik yerlerindeki matematikçilerin internet aracılığıyla bir proje üzerinde ortak çalışma yapmasına olanak sağlayan Polymath projelerinin sekizincisi Terence Tao başkanlığında bu sınır problemi üzerine kuruldu ve bu sayı 246'ya indi.

Sayının en son 2'ye indirilmesini bekliyoruz, ama 246 da şimdilik geceleri huzur içinde uyumamıza yetiyor.

Aslında Her Şey Riemann'la Başladı

Asal sayılardan söz ederken Riemann'dan söz etmemek mümkün değil. Hayatında sayılar kuramı üzerine tek bir makale yazdı. O güne kadar reel sayılar kullanılarak hesaplanan Euler'in bir fonksiyonunu karmaşık sayılara genişletti. Şimdi Riemann Zeta fonksiyonu dediğimiz bu fonksiyonun sıfır olduğu noktalar ile asal sayıların dağılımı arasında bağlar buldu. Zeta fonksiyonunun sıfırlarının belli bir özelliğe sahip olduklarını gözlemlediğini ama bunu kanıtlayamadığını, zaten ilk etapta bu özelliğin kendi sonuçlarını etkilemeyeceğini yazdı. Bugün Riemann'ın "yapamadım" dediği o ispatı yapana Clay Matematik Enstitüsü bir milyon dolar ödül vaat ediyor.

Her Zaman Para Ödülü Yok

Alman matematikçi Christian Goldbach'ın 1742'de Leonhard Euler ile mektuplaşması sonunda ikisinin de doğru olduğunu düşündüğü ama kanıtlayamadığı bir iddia ortaya çıktı: 2'den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir.

Bugün Goldbach Sanısı olarak bilinen bu iddiayı kanıtlayan kişi hiçbir para ödülü almayacak ama adı tüm matematik kitaplarında ve sayılardan söz edilen her yerde insanlık var oldukça yer alacak. Üstüne kendisi bir milyon dolar verse elde edemeyeceği bir "ölümsüzlük".

Ölümsüzlüğü yeterli görmeyip illa para olsun diyenler üzülmesin. Yüz milyon basamaklı bir asal sayı bulan ilk kişiye 150.000 dolar, bir milyar basamaklı bir asal sayı bulan ilk kişiye de 250.000 dolar ödül var. Ödül için Electronic Frontier Foundation'ın web sitesine başvuruluyor.

ELECTRONIC FRONTIER FOUNDATION

İbn-i Heysem (965-1040)
p sayısının asal olması için gerek ve yeter şartın p sayısının *(p-1)!+1'*i bölmesi olduğunu buldu. Bugün bu sonuç Wilson teoremi olarak biliniyor.

Dipsiz Kuyu

Asal sayılar hakkında anlatılacak hikâyelerin şu ana kadar çok azına değinebildik.

Fermat asalları diye bilinen sayıların çoğu asal değildir ama düzgün bir çokgenin sadece cetvel ve pergel yardımıyla çizilip çizilemeyeceğine karar vermede kullanılır.

Kummer Fermat'nın Son Teoremi üzerine çalışırken asal sayıları düzenli ve düzenli olmayanlar olarak ikiye ayırır. Düzenli olanlar bazı Bernoulli sayılarının paylarını bölmez. Bunlardan kaç tane olduğu bilinmiyor.

Yine Fermat'nın "küçük" teoremi olarak bilinen bir bölme kuralı kullanılarak, bir tam sayının yüzde kaç ihtimalle asal olacağı tartışılabilir.

Jones, Sato, Wada ve Wiens adlı araştırmacılar yirmi altı parametreye bağlı yirmi beşinci dereceden bir polinom yazdı. Bu polinomun parametrelerine sadece tam sayılar vererek elde edilen değerlerin sıfırdan büyük olanları sıralandığında sadece asal sayılar ve asal sayıların tümü elde edilir.

Asal bir sayının son basamağı 1, 3, 7 veya 9 olabilir (2'den ve 5'ten başka sonu 2 ve 5'le biten asal sayı yoktur). Bu durumda sonu 9'la biten bir asalın ardından sonu 1'le biten bir asalın gelme olasılığının %25 olmasını beklerken son yapılan çalışmalar bu olasılığın %65 daha fazla olduğunu gösteriyor.

İbn-i Heysem 1000'li yıllarda bir sayının asal olması için bir kıstas ortaya koydu. Bu kıstas 1771'de Lagrange tarafından kanıtlandı ve bu sonuç bugün Wilson Teoremi olarak biliniyor.

Martin Gardner'in dediği gibi, asal sayılar konusu matematiğin hiçbir dalında olmadığı kadar gizem, zarafet ve heyecan barındırır.

Biz doğaya dönelim.

Doğada Asal Sayılar

Asal sayıların sadece düşünen zihinlerde var olduğu, doğada bulunmadığı söylenir. Hatta uzaylılara bir mesaj gönderilecekse bu mesajın uzayda var olan elektromanyetik gürültünün arasından sıyrılıp dikkat çekmesi için asal sayılar içermesi gerektiği düşünülür.

Temas filminin afişi (solda)
Filmde Jodie Foster uzaydan gelen mesajları çözerken (üstte)

Nitekim Hollywood da bu konuya 1997'de Robert Zemeckis yönetimindeki *Temas (Contact)* filmiyle el atmıştı. Baş rolünde Jodie Foster'in oynadığı bu filmde astronomlar uzaydan gelen ve asal sayıları art arda kodlayan bir mesajla karşılaşırlar. Doğada asal sayı olamayacağına göre bu mutlaka Emre Sermutlu'nun *İğne Deliğinden Gelecek* yazılarında anlattığı uzaylılardan gelen bir mesajdır. Filmin devamında bu mesaj çözülür, uzaylılarla temasa geçmeye çalışılır ve bu arada akademik dünyanın tüm entrikaları da yan öykü olarak anlatılır.

Carl Sagan, 1980'de yayımlanan *Cosmos* dizisinde milyarlarca yıldızdan söz ederken

Filmin dayandığı romanı kimin yazdığını başlarda bilmiyor olsanız da film ilerledikçe uzayla ilgili her türlü büyüklüğü anlatmakta sık sık "milyarlarca ve milyarlarca" lafı kullanılmaya başlayınca hemen gözünüzün önüne *Cosmos* dizisinde yıldızlara bakıp bakıp bu sözü söyleyen Carl Sagan gelecektir.

Öte yandan doğada asal sayıların olmadığı da bir yalandır! Bazı Ağustos böceği türleri ömürlerinin 13 veya 17 yılını, ikisi de asal sayı, toprak altında geçirip ondan sonra ortaya çıkar. Böylece onları yiyerek beslenecek avcı türlerin gelişmesine fırsat vermedikleri düşünülür. Ayrıca bu hayvancıklar ortaya çıktıkları yaz öter, çiftleşir ve ölürler. Kışa hazırlık yapmalarına gerek olmadığı için *La Fontaine* masalındaki karıncanın da garezine maruz kalırlar. ■

Kaynaklar

Soundararajan, K., "Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yıldırım", Bulletin of the American *Mathematical Society*, Cilt 44, Sayı 1, s. 1-18, 2006.

Oliver, R. J. L., Soundararajan, K., "Unexpected biases in the distribution of consecutive primes", *Proceedings of National Academy of Science USA*, Cilt 113, Sayı 31, s. E4446-E4454, 2016.

Goldston, D. A., Pintz J., Yıldırım, C. Y., "Primes in tuples I", *Annals of Mathematics*, Cilt 170, Sayı 2, s. 819-862, 2009.

Zhang, Y., "Bounded gaps between primes", *Annals of Mathematics*, Cilt 179, sayı 3, s. 1121-1174, 2014.

Maynard, J., "Small gaps between primes", *Annals of Mathematics*, Cilt 181, Sayı 1, s. 383-413, 2015.

Riemann, B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie*, Kasım 1859. (Bkz. Bernhard Riemann, Collected Papers, çevirenler: R. Baker, C. Christenson ve H. Orde, Kendrick Press, s. 135-149, 2004.)