

Değerli okurlarımız, Eğlence Havuzu ve Olimpik Havuz köşelerinde yer alan problemlerden herhangi birinin doğru çözümünü gönderen ilk iki okuyucumuza TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları'ndan birer kitap hediye edeceğiz. Soruların yayımlandıkları ayın ilk 15 günü içinde, çözümlerinizi birlikte posta adresinizi de matematik.havuzu@tubitak.gov.tr adresine göndermeniz gerekiyor.

2013'ü Uğurlarken

2013 sayısının ilginç bazı özellikleri

- 2013'ün ve kendisinden sonra gelen sayılar 2014'ün ve 2015'in her birinin üç farklı asal çarpanı vardır:

$$2013 = 3 \times 11 \times 61$$

$$2014 = 2 \times 19 \times 53$$

$$2015 = 5 \times 13 \times 31$$

2013'ten önce bu özelliğe sahip sadece iki sayı vardır: 1309 ve 1885. Bu özelliğe sahip bir sonraki sayı ise 2665'tir.

- 2013 asal sayıların karelerinin toplamı ve farkı olarak $31^2 + 29^2 + 17^2 - 7^2 - 5^2 - 2^2$ şeklinde yazılabilir.

En az bir asalı 31'e eşit veya daha büyük olan ve bu şekilde yazılabilen en küçük sayı 2013'tür.

Bu özellikteki bir sonraki sayı $2974 = 31^2 + 29^2 + 23^2 + 17^2 - 7^2 - 3^2 + 2^2$ 'dir.

- 2013 ikiz asalların ve bu asalların sıralamalarının toplamı olarak yazılabilir.

$$2013 = 857 + 859 + 148 + 149$$

Burada 857 ve 859 ikiz asallardır ve bunlar 148. ve 149. asallardır.

- $\arctan(2) + \arctan(0) + \arctan(1) + \arctan(3) = \pi$ 'dir.

Kum Havuzu

2013

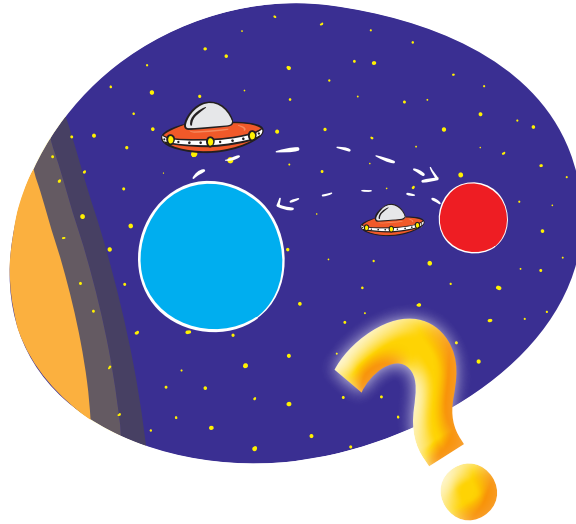
İstanbul'un fethinden bu yana dört ardışık sayı kullanılarak yazılan ilk yıl 2013'tür. 2013 yılından sonra (10.000 yılından önce) böyle kaç yıl daha olduğunu bulabilir misiniz?

SAYILAR CÜMLESİ

"Bu cümlede ...

tane 1, ... tane 2, ... tane 3, ... tane 4, ... tane 5, ... tane 6, ... tane 7, ... tane 8, ... tane 9 ve ... tane 0 bulunmaktadır."

Yukarıdaki boşlukları bir veya iki basamaklı sayılarla, cümle doğru olacak şekilde doldurabilir misiniz?



UZAY YOLCULUĞU

Uzay yolculuğunun sıradanlaştığı bir çağda Mars ve Dünya arasında karşılıklı seferlere başlanmıştır.

Her gün, Dünya'daki uzay istasyonuna göre saat tam 14.00'da, Mars'tan ve Dünya'dan karşılıklı olarak birer gemi hareket etmektedir.

Yolculuk her iki yönde de tam 7 gece 7 gün sürmektedir.

Yolculuk boyunca Dünya'dan Mars'a giderken karşı yönden gelen kaç uzay gemisiyle karşılaşırız?

ELMALAR

Neşe ve Onur ertesi gün pazarda satmak üzere bahçelerindeki elmaları topluyorlar. Her ikisi de eşit sayıda elma topluyor, fakat Neşe'nin elmaları biraz daha iri. Onur elmaların üç tanesini 5 liradan, Neşe ise iki tanesini 5 liradan satmaya karar veriyor. Pazara gidecekleri gün Neşe'nin beklenmedik bir işi çıkıyor ve pazara gidemeyeceğinden satması için elmalarını Onur'a veriyor. Onur pazara gittiğinde, elmaları farklı fiyatlarla satmanın karışıklığa neden olabileceğini düşünerek bütün elmaları bir araya getiriyor ve beş tanesini on liradan satmaya başlıyor.

Sizce Onur doğru mu yapmıştır?



Eğlence Havuzu

100 ELDE ETME

Aşağıdaki sayıların (sirasını değiştirmeden) aralarına sadece +, -, × veya / sembollerini koyarak ve istediğiniz kadar parantez kullanarak 100 elde edebilir misiniz?

Örnekler:

5, 5, 9, 8 ve 3 sayıları kullanılırsa

$5/5+9\times(8+3)=100$ elde edilir.

7, 4, 3, 6 ve 2 sayıları kullanılırsa

$7\times4+(36)\times2=100$ elde edilir.

1. 1 2 3 4 5
2. 2 3 4 5 6
3. 3 4 5 6 7
4. 4 5 6 7 8
5. 5 6 7 8 9
6. 6 7 8 9 1
7. 7 8 9 1 2
8. 8 9 1 2 3
9. 9 1 2 3 4

HANGİ SAYI

Beş basamaklı bir sayının sonuna 1 yazılarak elde edilen sayı, başına 1 yazılarak elde edilen sayının üç katıdır.

Bu beş basamaklı sayı nedir?

BÖLÜNEBİLME

248 sayısı, her basamağındaki rakamın sayı değerine bölünür. 1824 daha büyük bir sayıdır ve aynı özelliğe sahiptir. Tüm basamakları farklı rakamlardan oluşan, 0 içermeyen ve her basamağındaki rakamın sayı değerine bölünebilen en büyük sayıyı bulabilir misiniz?

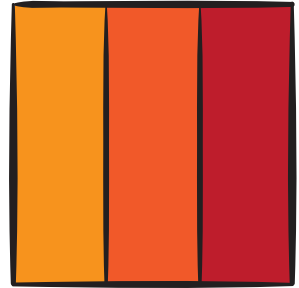
BENZER ŞEKİLLER

Şekildeki kare üç eş parçaya ayrılmıştır.

Kareyi ikisi eş, diğeri ise bunlarla eş olmayan

üç benzer parçaya ayırabilir misiniz?

Not: Bir şekil diğeri belirlili bir oranda küçültülmesi ile elde ediliyorsa bu şekillere "benzer şekiller" adı verilir.



Olimpik Havuz

YÜZDELİK KALAN

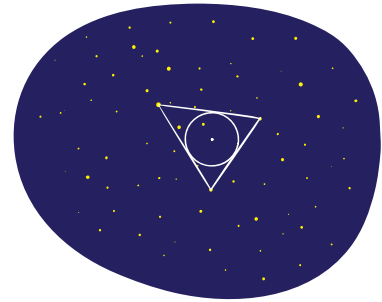
2013 2012 2011

sayısının ondalık yazılımındaki son 2 rakam nedir?

UZAYDA NOKTALAR

Uzaydaki her noktaya bir gerçek sayı yazılıyor.

Tüm üçgenler için üçgenin iç teğet çemberinin merkezindeki sayı köşelerde yazan sayıların aritmetik ortalamasına eşitse, uzaydaki tüm sayıların birbirine eşit olduğunu gösteriniz.



Süs Havuzu

SİLİNER SAYI

Arkadaşlarınızı şaşırtabileceğiniz bir sayı oyunu

Arkadaşınıza verdiğiniz komutlar	Örnek
7 haneli telefon numaranı yaz	9876543
Rakamların yerlerini istediği gibi değiştir	5749863
İki sayının farkını bul	4126680
Basamaklardan bir tanesini sil	4126680
Diğer basamakların değerlerini topla	$4+1+6+6+8+0=25$
Sonucu söyle	25
Söylenen sayının basamak değerlerini toplayın	$5+2=7$
9'dan çıkarın	$9-7=2$
Arkadaşınızın sildiği sayıyı buldunuz	2

1089

İlk ve son basamakları farklı olan üç basamaklı bir sayı seçin ve bu sayıyı tersten yazın. Düzden ve tersten yazılı sayıların farkını hesaplayın.

Şimdi bu farkı tersten yazın. Bu kez farkı ve farkın tersten yazılışını toplayın.

Sonuç: 1089

(Örnek: $742-247=495$ $495+594=1089$)

(Not: İkinci adımda bulduğunuz fark 99 ise, 099 şeklinde üç basamaklı bir sayı gibi düşünüp 990 olarak yazın.)

Ayrıca $1089\times9=9801$

Hatta $1/1089=0,00091827364554637281\dots$

$$1/37 = 0,027027027027\dots$$

$$1/27 = 0,037037037037\dots$$

Çizimler: Rabia Alabay

GEÇEN SAYININ ÇÖZÜMLERİ

Kum Havuzu

24 SAYISININ GİZEMİ

3'ten büyük her asal sayı ya $6n + 1$ ya da $6n - 1$ şeklinde yazılabilir. $(6n + 1)^2 - 1 = 36n^2 + 12n = 2n(3n + 1)$ 'e eşittir. Ya n sayısı ya da $3n + 1$ sayısından tam olarak bir tanesi çift sayı olduğu, yani 2 ile bölünebileceği için $(6n + 1)^2 - 1$ sayısı 24 ile tam bölünür. Benzer şekilde $(6n - 1)^2 - 1 = 36n^2 - 12n = 12n(3n - 1)$ olduğundan $(6n - 1)^2 - 1$ sayısı da 24 ile tam bölünür.

GENE Mİ 24...

İlk tutulan sayı x olsun. İki ile çarpınca $2x$, buna 48 ekleyince $2x + 48$ olur. İkiye bölünce $x + 24$ ve bundan ilk tuttuğumuz x sayısını çıkarınca 24 kalır.

DÜZLEMİ DÖŞEME

Düzgün n -genler ile düzlemi tamamen kapatabildiğimizi kabul edelim ve her bir kesişim noktasında tam r tane düzgün n -gen buluyor olsun. Verilen şekiller incelenirse $x = 3$ için $r = 6$, $n = 4$ için $r = 4$ ve $n = 6$ için $r = 3$ 'tür. Bu durumda bir köşe etrafındaki toplam 360 derecelik açılı düzgün

n -genin bir açısının ölçüsü olan $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ 'nin r katına eşit olmalıdır: $\frac{(n-2)180}{n} \cdot r = 360$, buradan $\frac{(n-2)}{n} = \frac{2}{r}$. Sonuç olarak $\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ olmalıdır.

Bu denklemin pozitif tam sayılar kümesindeki çözümleri $(n = 6, r = 3)$, $(n = 4, r = 4)$ ve $(n = 3, r = 6)$ 'dir.

Yani resimde verilen döşemelerden başkası mümkün değildir. Düzlem düzgün çokgenlerden sadece altıgenler, kareler ve üçgenlerle kaplanabilir.

OYLAMA

Cevap: Hayır. Örnek olarak 3 kişilik jüri heyeti yarışmacıları başarılarına göre aşağıdaki gibi sıralarsa verilen şartlar sağlanmış olur, ama Toprak jüri üyelerinin çoğunluğuna göre Ateş'ten daha başarılı bulunmuştur.

Birinci üyenin değerlendirmesi: Ateş > Güneş > Toprak

İkinci üyenin değerlendirmesi: Güneş > Toprak > Ateş

Üçüncü üyenin değerlendirmesi: Toprak > Ateş > Güneş

SIVI GÜBRE KARIŞIMI

%15 'lik karışımdan x kg, %30 'luk karışımdan y kg alınırsa toplam kütle $x + y$ ve etkin madde kütlesi $0,15x + 0,3y$ 'dir. Elde edilmek istenen 12 kg %35 'lik karışımdaki etkin madde 3 kg olduğundan, $x + y = 12$ ve $0,15x + 0,3y = 3$ denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerin çözümünden de $x = 4$ kg, $y = 8$ kg elde edilir.

Eğlence Havuzu

100 ELDE ETME

- 8 8 8 5 1 4 : $100 = 8 \times 8 + 8 \times 5 - 1 \times 4 = 88 - 8 + 5 \times 1 \times 4$
 - 1 6 5 7 7 7 : $100 = 1 + 6 - 5 + 7 \times (7 + 7) = 1 - 6 + 5 \times (7 + 7 + 7)$
 - 1 9 9 5 9 9 : $100 = 19 - 9 + 5 \times (9 + 9) = 1 + 99 + 5 \times (9 - 9)$
 - 7 7 4 4 6 9 4 : $100 = 7 + 7 + 4 + 4 + 6$
- $x(9 + 4) = 7 \times 7 + 4 / 4 + 6 \times 9 - 4$
- 2 2 2 2 9 7 4 : $100 = 2 / 2 - 2 + 2 + 9 \times (7 + 4) = 22 \times (2 + 2) + 9 + 7 - 4$
 - 4 2 6 1 9 1 9 : $100 = 4 / 2 \times (6 - 1) + 9 \times (1 + 9) = 42 \times 6 + 19 \times (1 - 9)$

Doğru Çözümler: Tank Özdemir, Elif Tuncel, Feyyaz Akın, Mustafa Alperen Coşkun, Hakan Ediz Gençgöy, Burak Zillioğlu, Hilal Şen, İsmail Ümit Kanber, Ufuk Yıldırım, Bayram Yıldız, Kemal Ardoğa, Beyza Örs, İremgül Gürcüm, Yağmur Candan, Yusuf Emre Köroğlu

ÇAKIYAN DOĞUM GÜNLERİ

Genel olarak, T farklı elemanı olan bir kümeden n tane eleman seçilirse, seçilen elemanların hepsinin farklı olma olasılığı $\frac{T!}{T^n(T-n)!}$ 'dir.

T 'nin büyük değerleri için bu sayı yerine $e^{-\frac{n^2}{2T}}$ sayısını kullanabiliriz.

En az iki elemanın aynı olma olasılığının $\frac{1}{2}$ 'den büyük olması için $e^{-\frac{n^2}{2T}} < \frac{1}{2}$ olması gerekir. Bu eşitsizlik düzenlenirse $n > \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{T}$

elde edilir. $T = 366$ alındığında eşitsizlik $n > 22,525$ olur.

Yani 22 kişiden daha kalabalık bir toplulukta $\frac{1}{2}$ 'den fazla bir olasılıkla doğum günü aynı olan en az iki kişi bulunur.

Daha fazla bilgi için "doğum günü paradoksu" adıyla bilinen bu konuda araştırma yapabilirsiniz.

Doğru Çözümler: Hakan Özkan, Yusuf Emre Köroğlu, Zeynel Abidin EMİR

TOPLANTILAR

2, 3, 4, 5, 6 sayılarının en küçük ortak katı 60 olduğundan her 60 günde bir tüm gruplar toplanır. 2013 yılı içinde tüm grupların toplandığı günlerin sayısı 6'dır: 1 Mart, 30 Nisan, 29 Haziran, 28 Ağustos, 27 Ekim ve 26 Aralık 1 Ocak'tan başlayarak günlere 1'den 365'e kadar sıra numarası verelim. Hiç toplantı olmayan günün sıra sayısının 2, 3 ve 5 ile bölünmemesi gerekir. Bu özelliğe sahip 365'ten küçük sayılar 97 tane dir.

O halde hiç toplantı yapılmamış olan günlerin sayısı 97'dir.

Doğru Çözümler: Zeynel Abidin Emir, Mustafa Alperen Coşkun, Kemal Ardoğa

EN BÜYÜK SAYI

Üç tane 2^{22} , üç tane 3^{33} , üç tane 4^{44} , dört tane $2^{2^{22}}$.

(Doğru Çözen: Hakan Kemer, Kemal Ardoğa)

HAVUZ TEMİZLİĞİ

Havuz temizliğinde çalışan kişilerin sayısını n ile, bir kişinin bir günde temizleyebildiği alanı da a ile gösterelim. Büyük havuzun temizlenmesi için yarım gün boyunca $\frac{n}{2}$ kişi, yarım gün n kişi çalıştığı için bu havuzun alanı $\frac{n}{2} \cdot \frac{a}{2} + n \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{4}an$ 'dir. Küçük havuzu temizlemek için yarım gün boyunca $\frac{n}{2}$ kişi, bir tam gün boyunca bir kişi çalıştığı için bu havuzun alanı da $\frac{n}{2} \cdot \frac{a}{2} + a = \frac{n+4}{4}a$ olur. Büyük havuz, küçük havuzun iki katı olduğundan $\frac{3}{4}an = \frac{n+4}{2}a$ yazabiliriz. Buradan $n = 8$ bulunur.

Güneş'in yardımına 7 arkadaşı gelmiştir.

Doğru Çözümler: Seren Yıldız, Ayşe Gül Dönmez, Kemal Ardoğa, Yusuf Emre Köroğlu

Olimpik Havuz

ÇÖZÜMSÜZ DENKLEM

Verilen denklemin sol tarafını çarpanlara şöyle ayırabiliriz:

$$\frac{x^{2000} - 1}{x - 1} = (x^{1000} + 1)(x^{500} + 1) \frac{x^{500} - 1}{x - 1}$$

Çarpanlara sırasıyla a , b ve c dersek b ve c 'nin $a - 2$ 'yi böldüğünü c 'nin de $b - 2$ 'yi böldüğünü görürüz. Buradan a, b, c 'den herhangi ikisinin ortak bölenlerinin en büyüğünün en fazla 2 olduğu çıkar. abc çarpımı ancak a, b, c 'nin kare veya karenin iki katı olması durumunda bir karedir. a ve b 'nin kare olamayacağı açıktır, dolayısıyla karelerin iki katıdır.

Buradan $4ab = 4x^{1500} + 4x^{1000} + 4x^{500} + 4$ 'ün kare olduğu çıkar.

Fakat bu imkânsızdır, çünkü

$$(2x^{750} + x^{250})^2 < 4x^{1500} + 4x^{1000} + 4x^{500} + 4 < (2x^{750} + x^{250} + 1)^2 \text{ 'dir.}$$

Doğru Çözümler: Osman Akar

ÇEMBERSELLİK

$m(\angle AOB) = m(\angle COA) = 120^\circ$ ve

$m(\angle OBA) = 60^\circ - m(\angle OAB) = m(\angle OAC)$ olduğu için AOB ve COA

üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla AOB üçgenini O merkezi etrafında saatın

ters yönünde 120° çevirip $|OC|/|OA|$ oranında ölçeklendirirsek

COA üçgenini elde ederiz. Bu dönüşüm altında D noktası E noktasına gider.

CANKURTARAN EKİBİ

Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygı.



Buradan

$$m(\angle DOE) = 120^\circ = 180^\circ - m(\angle BAC)$$

elde edilir, bu ise A, D, O, E

noktalarının çembersel

olduğunu gösterir.

Doğru Çözümler: Erhan Erdoğan,
Eyüp Amanvermez, Begüm Çelebi