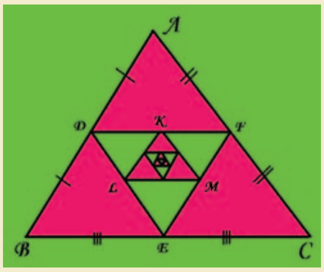
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Sonsuz Toplam – 2



Geçen ay hatırlarsanız şekildeki gibi iç içe geçmiş sonsuz sayıdaki eşkenar üçgenin çevreleri toplamını sormuştuk. Bu ayki sorumuz ise birazcık farklı. Sizden bu sefer sonsuz sayıdaki bu üçgenlerin alanları toplamını bulmanızı istiyoruz. AB = 10 ise toplam alan kaça eşit olur? (Toplam Alan = A(ABC) + A(DEF) + A(KLM) + ...)

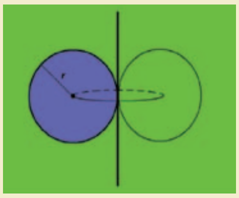
Şüpheli Asal

Özellikle kriptoloji alanında kullanım alanının bulunması nedeniyle sayıların asal olup olmadıkları ile ilgili günümüzde sayısız çalışma yapılıyor. Bu çalışmalardan bir tanesine bu soru sayesinde gelin siz de katılın. 1,000,000,000,001 sayısı acaba asal mı yoksa değil mi? Asal değilse hangi iki sayının çarpımına eşit? (İpucu: 1001 sayısı asal olmadığına göre buradan genel bir kural çıkarılabilir mi?)

İki Katı

Elimizde birler basamağında 4 rakamı bulunan bir sayı var. Bu sayının en büyük basamağındaki rakam ile birler basamağındaki 4'ü yer değiştirdiğimizde yeni sayı, eski sayının iki katı oluyor. Acaba sayımız kaçtır?

Hacim Hesabı



Yarıçapı r olan bir çember üzerinde rasgele bir nokta alalım ve bu noktadan çembere teğet çizelim. Şimdi de çemberi bu teğet etrafında 360 derece döndürelim. Oluşturduğumuz bu şeklin hacmi acaba kaçtır?

G. Gültekin / ANKARA

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuzun adresine TÜBİTAK Yayınları'nın "Bir Matematikçinin Savunması (G.H.Hardy)" adlı kitabı postalanacaktır.)

Geçen Ayın Çözümleri

Şans Eseri

İlk olarak kesirli terimlerin atılmadığı durumu ele alalım. Bu durumda her iki parantez içinde ayrı ayrı payda eşitlemesi yapılırsa gerekli sadeleştirmeler sonucunda şu eşitlik elde edilir:

$$A = \frac{x^5+1}{x-1} \cdot \frac{x^5-1}{x+1}.$$

Şimdi eşitliğe küçük bir sihirli dokunuş yapalım:

$$A = \frac{x^5+1}{x+1} \cdot \frac{x^5-1}{x-1}.$$

Daha sonra da payı uygun şekilde açıp payda da bulunan ortak çarpanı sadeleştirelim: $A = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ Görüldüğü gibi elde ettiğimiz eşitlik dikkatsiz öğrencinin kullandığı eşitlikle birebir aynı!

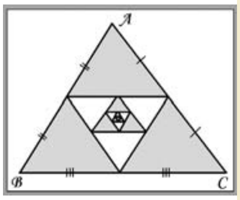
Köprüdeki Trafik

Köprünün toplam uzunluğu 3d iken, araba 2d'lik yolu t sürede ve kamyon d'lik yolu 2t sürede alıyorsa araçların hızlarına sırasıyla 4V ve V diyebiliriz. İlk olarak kamyonun arabaya yol verdiğini varsayalım. O zaman kamyon geri geri köprüden çıkmak için 4t, daha sonra da öbür uca geçmek için 6t, yani toplam 10t süreye ihtiyaç duyacaktır. Şimdi de arabanın yol verdiği duruma bakalım: Arabanın geri geri köprüden çıkması 2t süre alır. Ancak kamyonun köprüden çıkması için 2t süreye daha ihtiyaç vardır. Araba 3t/2 sürede köprünün bir ucundan diğer tarafa geçebildiğine göre arabanın yol verdiği durumda sadece 4t + 3t/2 = 11t/2'lik süre yeterli olacaktır.

Ters Çarpım

Cevap son derece basit: Komşu iki basamağı toplamı 9'u aşmayan her sayı, soruda bahsedilen özelliği sağlayacaktır. Alt alta çarpma işlemini gözünüzün önüne getirin. 11 ile çarpmanın sonucu için sayının kendisi ile bir basamak sola kaymış hali toplanır. Eğer komşu iki basamak toplamı 9 ve 9'dan küçükse toplamda aynı basamağa denk gelen sayılar toplamı 9'dan büyük olmayacaktır ve sayı ters çevrildiğinde yine artan oluşmayacağı için çarpım da ters dönecektir.

Sonsuz Toplam



Şekildeki iç içe üçgenlerin, kenarların orta noktalarına çizilmeleri nedeniyle 1/2 oranında benzer üçgenler olduğuna dikkat edelim. Bu durumda ABC üçgeninin çevresi 30 ise iç içe üçgenlerin çevreleri 30/2, 30/4, 30/8,... şeklinde sonsuza gidecektir. Bizim amacımız bu sonsuz toplamın değerini bulmak. A = 30 + 15 + 15.(1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) . Parantez içindeki seri son derece ünlü bir sonsuz toplam serisidir ve değeri 1'e yakınsar. Diğer bir deyişle serinin toplamı ancak sonsuzda 1 olur. O halde tüm üçgenlerin çevreleri toplamı A = 30 + 15 +15.1 = 60'dır.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Basamaklar Toplamı

"Basamakları toplama" kavramı, adından da anlaşılabileceği gibi bir sayının tüm basamaklarındaki rakamlarının toplamını bulmaktan başka bir şey değil. Örneğin 123 sayısının basamakları toplamı 1+2+3 = 6 ya da 1001 sayısının basamakları toplamı 1+0+0+1 = 2. Gösterimi kolay olması için

$$S(789) = 24$$
$$S(24) = 6$$
$$S(1000) = 1$$

basamakları toplama işlemini S( ) olarak gösterelim. Yani S(123) = 6, S(1001) = 2 olsun. Bu ayki yazımızda temelde çok basit olan basamakları toplama konusunu, "mücadeleci" matematik ruhunuzu canlandırmak amacıyla biraz zorlaştırdık. İşte sorumuz: 4444^{4444} sayısının basamakları toplamının basamakları toplamının basamakları toplamı kaçtır? Diğer bir gösterimle S(S(S(4444^{4444}))) = ? Örneğin sorumuz 4444^{4444} sayısı yerine 9999 sayısı için sorulsaydı cevap S(S(S(9999))) = 9 olacaktı çünkü S(9999) = 36, S(36) = 9, S(9) = 9.

4444^{4444} sayısını n olarak göstererek çözüm için kabaca bir yaklaştırma yapalım. 10000^{5000} sayısı 4x5000 = 20 000 sıfır ve bir tane 1den oluşan bir sayıdır. Bu sayı için n < 10000^{5000} eşitsizliğini yazabiliriz. 10 000^{5000} sayısına kadar basamakları toplamı en büyük sayının basamakları toplamı 9 x 20 000 = 180 000 olacaktır. O halde S(n) ≤180 000'dir. Şimdi bir adım daha ileri gidelim. 180 000 sayısına kadar basamakları

$$S(S(S(4444^{4444})) = ?$$

toplamı en büyük sayı 99999'dur. Öyleyse S(S(n)) ≤ S(99999) = 45 olur. Şimdi de üçüncü ve son adımımızı atalım. 45'e kadar basamakları toplamı en büyük sayı 39 olduğuna göre S(S(S(n))) ≤ S(39) = 12 olur. Artık aradığımız değerin 12'den küçük olduğunu biliyoruz.

Bir de sayımızın mod 9'daki değerine bakalım. Özellikle 9 sayısını seçtik çünkü bir sayının 9'a bölümünden arta kalan ile sayının basamakları toplamının 9'a bölümünden arta kalan aynıdır. Kolayca bulabileceğiniz gibi 4444^3 = 1 (mod 9) ve 4444^{4444} = 7 (mod 9) olur. O halde S(S(S(n))) = 7 (mod 9) olmalıdır.

Sonuç olarak aradığımız sayı 12'den küçük ve 9'a bölündüğünde 7 kalanını veren bir sayıdır. Artık sonuca çok ama çok yakınız. Bu şartları sağlayan tek bir sayı vardır ve o da tabi ki 7'dir!