Cetvel, Pergel ve Düzgün Onyedigen

1996 Önemli Bir Yıldönümü

İnsanlarda, önemli olayların yıldönümlerini gözlemleme eğilimi vardır. Kullandığımız sayı sistemi 10-luk tabanda olduğu için, 10 la ilgili yıldönümleri daha çok göze çarpar ve özellikle günümüzden yüzyıllarla ($10^2 = 100$) ayrılan olaylar belirginleşir.

Bu yüzden, matematikçiler için 1996 yılı yıldönümleri açısından zengindir. Ekim sayımızda, Descartes'ın (1596-1650) doğumunun üzerinden tam dört yüz yıl geçtiğini söylemiştik. Ama 1996 aynı zamanda *Asal Sayı Teoremi*'nin 100., hangi düzgün n-genlerin yalnız cetvel ve pergel kullanılarak çizilebileceğinin keşfinin 200., ilk *Calculus* ders kitabının yayımlanmasının da 300. yıldönümünü oluşturuyor.

Bu yazıda düzgün çokgenlerin, cetvel ve pergelle çizilebilirliği ile ilgileneceğiz.

Cetvel ve Pergelle Çizim

İlk olarak "yalnız cetvel ve pergel kullanarak çizim yapmak"la ne demek istediğimizi açıklayalım. Cetvelle belirtmek istediğimiz sadece, verilen iki noktayı bir doğruyla birleştirmeye yarayan araçtır. Cetveli uzunluk ölçmek için kullanamayız ve cetvelin üzerine uzunluk da işaretleyemeyiz. Pergelle ise, merkezi verilen ve verilen bir uzunlukta yarıçapa sahip olan çemberi çizebiliriz.

Düzgün Çokgenlerin Çizimi

Düzgün n-gen, her dış açısı $2\pi/n$ (derece olarak yazarsak $360°/n$) ve eşit, tüm kenarları birbirine eşit uzunlukta olan dışbükey çokgendir.

Cetvel ve pergel kullanarak düzgün çokgenleri çizmek eski Yunanlıların uğraştığı önemli problemlerden biriydi. Öklid (Euklides), ölümsüz eseri *Elemanlar*'ın dördüncü cildinde cetvel ve pergelle düzgün üçgen,

Aksiyomatik geometrinin kurucusu: Öklid

dörtgen (yani kare), beşgen, altıgen, sekizgen ve onbeşgenin nasıl çizildiğini anlatmıştır. Öklid her ne kadar belirtmediyse de, cetvel ve pergelle çizilebilen bir çokgenin kenar sayısını ikiye katlayarak elde edeceği çokgenleri çizmesini de biliyordu. Ama Öklid'in ve diğerlerinin yanıtını bilmediği bir soru vardı: "Hangi n ler için, düzgün n-gen, cetvel ve pergelle çizilebilir?" Bu soru birçok amatör ve profesyonel matematikçiyi uğraştırdı ama çözümü Öklid'den sonra 2000 yıl daha beklemeliydi. Doğrusu matematik dünyasının beklediğine de değdi, çünkü matematikçiler bu çözümle Carl Friedrich Gauss (1777-1855)'la tanışıyordu. 30 Mart 1795 sabahı, daha yataktan kalkmamışken, bu genç, düzgün onyedigenin nasıl çizileceğini keşfettiğini anladı ve bu buluş onu öylesine heyecanlandırdı ki, Gauss o gün ünlü günlüğüne başladı. Bu defterin ilk sayfası şöyle başlıyordu: *"Principia quibus innitur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes & c. Mart. 30. Brunsv."* (Bu satırlarda, bir çemberin geometrik olarak 17 parçaya ayrılabileceği söylenmektedir.) Ve Gauss bu buluşuyla aynı zamanda, profesyonel matematikçi olmak konusunda kesin kararını veriyordu. Bu büyük başarının ardından Gauss, düzgün 17-geni çizme yöntemini çok önemli ve güzel bir kurama dönüştürdü ve hangi n doğal sayıları için bir düzgün n-genin cetvel ve pergelle çizilebildiğini buldu.

Heptadekagon ya da 17-gen

Herhalde düzgün 17-genin çiziminin birkaç paragrafa sıkıştırılamayacağını söylemek yersiz olur; öylesine kolay olsaydı kuşkusuz geçen 2000 yılda birileri mutlaka bu sonuca ulaşırdı. Zorluk, çözümün basamaklarının karmaşıklığından çok, basamaklar arasındaki geçişlerin karmaşıklığında yatmaktadır. Şimdi, Gauss'un yaptığı işi anlamaya çalışalım.

Ekim sayısında, bu köşede yayımlanan yazıdan anımsayacağınız gibi Descartes, La Geometrie adlı eserinde, birim uzunluğu tanımladıktan sonra, uzunluğu tamsayılar ve +, -, x, ÷ ve √ işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla belirtilen doğru parçalarının cetvel ve pergelle çizilebileceğini anlatıyordu.

Gauss'un yaptığı gözlemse şuydu: $\cos(2\pi/n)$ uzunluğu çizilebilirse düzgün bir n-gen çizilebilir. Bu da şöyle yapılabilir. Bir birim çemberin içinde, şekil 1'deki gibi, $|OC| = \cos(2\pi/n)$ olacak şekilde C noktasını işaretler, C noktasından OC doğrusuna dik çıkar ve bu dikmenin birim çemberi kestiği noktalardan birine B dersek, $\theta = \angle BOC$ açısı için

$$\cos\theta = \frac{|OC|}{|OB|} = \frac{\cos(2\pi/n)}{1} = \cos(2\pi/n)$$

olur yani $\theta = 2\pi/n$ elde ederiz.

AB kirişini çemberin çevresinde n kez yinelersek $(2\pi/n)\ n = 2\pi$ radyan açı taramış oluruz ve tam olarak A noktasına ulaşırız ve düzgün bir n-gen elde etmiş oluruz.

Buraya kadar söylediklerimizi özetlersek; $\cos(2\pi/17)$ çizilebilirse bir düzgün 17-gen de çizilebilir ve $\cos(2\pi/17)$ de +, -, x, ÷ ve √ işlemleri tamsayılara sonlu sayıda uygulanarak elde edilebiliyorsa çizilebilir.

Gauss'un yaptığı iş de budur. Bu işte, Gauss, karmaşık sayıların

Problem Seminerleri

Problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara ödüller verilecektir. Ödül kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümler, ilgili problem seminerinin başlamasından önce postayla ya da elden Problem Seminer Grubu'na iletilmelidir.

Her seminerdeki dört problemden birincisi 1, ikincisi 2, üçüncüsü 3, dördüncüsü ise 5 puan değerindedir. Her doğru için ödül verileceği gibi, bir dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30 un üstünde ise, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Matematik Problem Seminerleri, 1996 Sonbahar Döneminde de Ankara'da "TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No. 221 Kavaklıdere" adresinde yapılmaya devam edilecektir.

Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir:
Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme Grubu,
Matematik Problem Seminerleri
Atatürk Bulvarı, No. 221
06100 Kavaklıdere- Ankara

Problem Semineri 97/1
8 Ocak 1997, Çarşamba, Saat: 15^{00}-17^{00}

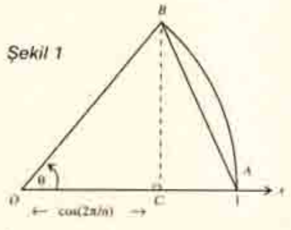
1. Düzlemde, bir dışbükey n-genin köşelerini oluşturacak biçimde n nokta verilsin ve bu dışbükey n-genin tüm kenarları ve köşegenleri çizildiğinde, köşeler dışında hiçbir noktada ikiden fazla doğru parçası kesişmesin. Bu çizimde, oluşan tüm üçgenlerin sayısı nedir?

2. Dışbükey bir 1997-gen, her kenarı bir 7-genin kenarıyla çakışacak ve birbirine komşu herhangi iki 7-gen, komşu oldukları kenarı tam olarak içerecek biçimde dışbükey 7-genlere parçalanıyor. 1997-genin, aynı bir 7-genin kenarları olacak şekilde üç ardışık kenarı bulunduğunu kanıtlayınız.

3. Hangi dışbükey n-genler, herhangi iki komşu üçgen, komşu olmalarını sağlayan kenarı tam olarak içermeyecek biçimde üçgenlere parçalanabilir?

4. α ve β sıfırdan büyük gerçel sayılar olmak üzere, sonsuz düzlemin, alanı α dan büyük, çevresi β dan küçük ve kenar sayısı 6 dan fazla olan dışbükey çokgenlere parçalana-

Şekil 1

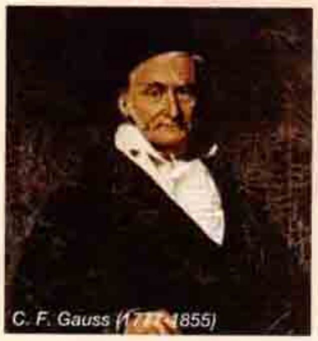


dünyasına gerçek, olağan dışı dehasını sergilemiştir. Bu ilk bakışta biraz garip geliyor doğrusu: Gerçek dünyadaki geometrik çizimlerin, sanal dünyayla ne ilgisi olabilir ki?

Gauss $z = \cos(2\pi/17) + i \sin(2\pi/17)$ karmaşık sayısının gerçel kısmının $\cos(2\pi/17)$ olduğunu ve z nin birimin 17 inci kökü olduğunu kullandı. Bu karmaşık sayılarla, geometrik çizim arasında bir köprü oluşturur ve Gauss bu köprüden büyük bir başarıyla geçer. $\cos(2\pi/17)$ için de şu eşitliği bulur:

$$\cos(2\pi/17) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}$$

Oldukça karmaşık görünen bu ifade, tamsayılara, toplama, çıkarma, çarpma, bölme, karekök alma işlemleri yapılarak elde edildiği için çizilebilir ve böylece $\cos(2\pi/17)$ çizilebilir. Bu da bize düzgün 17-genin cetvel ve pergelle çizilebildiğini gösteriyor.


C. F. Gauss (1777-1855)

Peki ya Diğer Çokgenler?

Acaba Gauss'un hangi düzgün n-genlerin cetvel ve pergelle çizilebileceği sorusuna yanıt neydi?

Bu sorunun yanıtına geçmeden önce birtakım yardımcı bilgiler edinelim: 18. yüzyılda yaşamış olan Leonhard Euler, verilen bir n tamsayısından küçük ve n ile aralarında asal doğal sayıların sayısının, n nin yararlı ve önemli bir aritmetik özelliği olduğunu fark edenlerden biridir. Euler bu sayı için $\phi(n)$ gösterimi kullanmıştır ve bu yüzden bu fonksiyona Euler fonksiyonu ya da Euler'in ϕ fonksiyonu denir. Bu fonksiyonun birçok ilginç özelliği vardır.

Bunlardan birini Euler'in kendisi de bulmuştur: m ve n aralarında asal doğal sayılarsa, $\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)$ dir. Ayrıca herhangi bir p asalı için

$$\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

olduğu da görülebilir.

Şimdi de gelelim Gauss'un yanıtına:

Bir düzgün çokgenin cetvel ve pergelle çizilebilmesi için gerek ve yeter koşul $\phi(n) = 2^m$ biçiminde olmasıdır. Yerimiz yeterli olmadığından bu önermenin kanıtını burada vermiyoruz, ama hangi n doğal sayılarının Euler fonksiyonlarının 2^m biçiminde olduğunu inceleyebiliriz.

$\phi(n) = 2^m$ nin çözümleri

n sayısını, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ birbirinden farklı asallar olmak üzere asal çarpanlara ayıralım:

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$$

Buna göre, ϕ fonksiyonunun belirttiğimiz özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(p_1^{m_1})\phi(p_2^{m_2})\ldots\phi(p_k^{m_k}) \\ &= p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1} \\ &\quad \ldots p_k^{m_k-1}(p_1-1)(p_2-1) \\ &\quad \ldots(p_k-1)\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz.

Bu ifadenin 2 nin bir katına eşit olması için, her p_i tek asal sayısı için $m_i = 1$ ve $p_i = 2^r + 1$ biçiminde olmalıdır. $2^r + 1$ in asal olması içinse, $r = 2^d$ biçiminde olmalıdır. Bu önermenin doğruluğu ise kolayca görülebilir: r nin tek bir böleni olduğunu varsayalım ve bu tek sayıya s diyelim. Herhangi bir a için

$$a^s + 1 = (a+1)(a^{s-1} - a^{s-2} + \ldots + 1)$$

olduğunu biliyoruz. $a = 2^{r/s}$ alırsak $2^{r/s}$ nin $2^r + 1$ i böldüğünü görürüz ve bu da $2^r + 1$ in asal olması ile çelişir.

Demek ki, p_i, n nin tek bir asal böleniyse

$$p_i = 2^{2^d} + 1$$

biçiminde olmalıdır. Bu biçimdeki asal sayılara, Fermat asalı dendiğini hatırlarsınız.

Bütün bu yeni bilgileri birleştirirsek, aradığımız yanıtı şöyle verebiliriz: *Bir düzgün n-genin çizilebilmesi için gerek ve yeter koşul, p_i ler, herhangi ikisi birbirinden farklı Fermat asalı olmak üzere, $n = 2^s p_1 p_2 \ldots p_k$ biçiminde olmasıdır.*

Üç Önemli İmkânsızlık

Kökeni eski Yunanlılara kadar uzanan ve çözümünü binlerce yıl bekleyen bir geometri sorusunun, sayılar kuramı ve cebire dayanan bir çözüme kavuşması, matematiğin insanlar için şaşırtmacalarla dolu olduğunu bir kez daha göstermiştir.

Çözmece

1. *ABCD* bir kirişler dörtgeni olsun. Bu dörtgenin, her bir kenarının orta noktasından, o kenarın karşısındaki kenara dik çiziliyor. Çizilen bu dört doğrunun noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

2. Yalnız cetvel ve pergel kullanarak düzgün beşgenin nasıl çizilebileceğini açıklayınız.

Geçen Ayın çözümleri

1. n çiftse $3^n + 5^n \equiv 2 \pmod 8$ dir. Ama $(x+2)^n - x^n \equiv 0 \pmod 4$ tür ve çelişkiye ulaşılır. n tekse,

$$3^n + 5^n = (4-1)^n + (4+1)^n$$

$$= 2 \cdot 4^n + 2 \cdot 4^{n-2} + \ldots + 2\binom{n}{n-1}4$$

$$\equiv 8 \pmod{16}$$

dir. x tekse,

$$(x+2)^n - x^n \equiv (x+2) - x$$

$$\equiv 2 \pmod 8$$

dir ve bu da bir çelişkidir.

x çiftse $(x+2)^n - x^n \equiv 0 \pmod{2^n}$ dir ve bu fark aynı zamanda mod 16 da 8'e denktir. Buradan $n=1$ ya da $n=3$ olduğu elde edilir. $n=1$ için, eşitliği sağlayan bir x tamsayısı olmadığı görülmektedir. Buna göre, $n=3$, $x=4$ tek çözümdür.

2. $f(x)$ in derecesi tekse, en azından bir gerçek kökü vardır. $f(x)$ in köklerinin en büyüğüne r diyelim. $f(r^2+r+1) = g(r)f(r) = 0$ olduğundan r^2+r+1 de $f(x)$ in bir köküdür. Ama, $r^2+r+1 > r$ dir ve bu da r nin en büyük kök olması ile çelişir. Sonuç olarak $f(x)$ polinomu çift dereceli olmak zorundadır.

Gauss'un çözüme kavuşturduğu bu önemli problemden başka, insanları yine iki bin yıldan fazla uğraştıran ve çözüme yine soyut cebir ve sayılar kuramı yardımıyla ulaşan, çokça bilinen üç soruyu da size kısaca tanıtmak istiyoruz:

1) Verilen bir kübün iki katı hacme sahip kübü çizmek,

2) Herhangi bir açıyı üç eşit parçaya ayırmak,

3) Alanı, verilen bir dairenin alanına eşit olan bir kareyi çizmek.

Yine bu sorularda da çizimlerin yalnız cetvel ve pergel kullanılarak yapılması isteniyordu.

İlk soruya, Eratosthenes'in Kral III. Ptolemy'ye M.Ö. 240 yılı yakınlarında yazdığı yazıda rastlanmaktadır. İkinci sorunun da Yunanlıların düzgün çokgelerin çizimiyle uğraşırken ortaya çıktığı düşünülüyor, çünkü düzgün dokuzgenin çizilebilmesi için açıları üçe bölmeyi bilmek gerekir. Üçüncü sorunun tarihi ise, dairenin alanının hesaplamaya çalışılmasıyla başlamıştır.

Çağlar boyunca bu sorular, en iyi matematikçilerin yanında birçok amatörü de uğraştırmıştır. 1775'te Paris Akademisi, görevlilerini amatör matematikçiler tarafından gönderilen ve bu üç sorunun çözümünü içerdiği ileri sürülen kağıtları okuyarak zamanlarını ve enerjilerini boşa harcamaktan kurtarmak için, artık bu üç problemle ilgili olarak gönderilen hiçbir şeyin incelenmeyeceğini belirtmek zorunda kalmıştır.

Ve sonunda ondokuzuncu yüzyılda problemler çözüldü. 1837 de Wantzel ilk iki sorunun çözümünü verdi, 1882 de de Lindemann üçüncü soruyu çözdü. Bu üç çözümün en önemli ortak yanıysa, üçünün geometrik olmaktan çok soyut cebire ve sayılar kuramına dayanmasıydı. 19. yüzyıla kadar soyut cebir henüz ortaya çıkmadığı için belki de bu çözümler bu kadar geç gelmişti.

Biz burada ne soyut cebirden bahsedeceğiz ne de bu soruların çözümünü vereceğiz. Ama ilgilenen arkadaşlar herhangi bir açının üçe bölünemeyeceğinin kanıtını aşağıdaki üçüncü kaynakta bulabilirler. Bir lise öğrencisinin kolaylıkla anlayabileceğini düşündüğümüz bu yazıyı herkese tavsiye ederiz.

Ayrıca bu üç sorunun çözümünü dördüncü kaynakta bulabilirsiniz. Kitap, soruların çözümü için gerekli olan cebir bilgisini verdikten sonra soruların çözümünü kolay anlaşılan bir şekilde gösteriyor.

Üçüncü sorunun çözümünün ilk ikisine göre daha zor olduğunu söylemeliyiz çünkü π nin transandant bir sayı olduğunun kanıtını da içeriyor. Bu kanıtsa, bir lise öğrencisi için oldukça fazla bilgi birikimi gerektiriyor.

Sonsöz

Matematiğin en güzel yanlarından biri de, birbirinden bağımsız gibi görünen konuların, aslında temelde çok fazla ortak yanlar içermesidir. Çağımızın en büyük hastalıklarından biri olan aşırı uzmanlaşma bu bağlantıların görülmesini engelleyebilir. Ama hiç kuşkusuz matematiğe büyük katkı yapacak, yeni kuramlar yaratacak matematikçiler, en geniş görüş açısına sahip olanlar olacaklardır. Yazımızın baş rol oyuncusu Gauss da bu matematikçilerdendi. O Matematikçilerin Prensiydi.

Aytek Erdil
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar

Dunham, W. "A Triple Anniversary", *Math Horizons*, Eylül 1996.
Gauss, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*, ABD.
Gökoğlu, İ. "Pergel ve Cetvelle Yapılamayan Çizimler" *Matematik Dünyası*, Cilt 1 sayı 1 ve 2.
Jones, A., Morris, S., Pearson, K. *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Universitext, New York, 1991.
Kulikov, A. "Construction Program", *Quantum*, Mart/Nisan 1996.
Thiele, R. "Mathematics in Göttingen (1737-1866). The Mathematical Tourist". *The Mathematical Intelligencer*, cilt 16, No 4, 1994
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Euclid.html

Leasing yapılmaz!

2 trilyon TL. kayıtlı, 1.2 trilyon TL.
ödenmiş sermayesi bulunan Vakıf Leasing
bir VakıfBank kuruluşudur.

Leasing yapılır...

Artık, sahibi olmak istediğiniz araçlar sizden çok hızlı olsa bile, onları yakalamak çok kolay. Vakıf Leasing, her türlü iş ya da üretim aracının finansman sorununu sizin için çözümlüyor. Vakıf Leasing'te seçeneğiniz çok: Telefon santralleri, hava ulaşım taşıtları, inşaat ve tekstil makineleri, bilgisayar, otomobil... Kısacası, işletmenizi kurarken ya da büyütürken ihtiyaç duyabileceğiniz her türlü iş ya da üretim aracına, "leasing" yoluyla kolayca sahip olabilirsiniz. Ödeme koşulları mı? Ödeme koşullarını dert etmenize gerek yok. Çünkü Vakıf Leasing'te, ödeme koşullarını siz belirlersiniz. Nakit akışına göre, zorlanmadan, sıkıntıya düşmeden...

Siz de Vakıf Leasing'e gelin, ihtiyacınız olan iş ya da üretim aracının kolayca sahibi olun.

VAKIF LEASING
VAKIF FİNANSAL KİRALAMA A.Ş.

Merkez: Tel: (0212) 252 96 31 (5 Hat) Faks: (0212) 252 96 30 **Ankara:** Tel: (0312) 419 01 55 (5 Hat) Faks: (0312) 419 01 50 **Bursa:** Tel: (0224) 223 76 83 (3 Hat) Faks: (0224) 223 25 93 **Gaziantep:** Tel: (0342) 234 05 01 Faks: (0342) 233 99 87 **İzmir:** Tel: (0232) 441 69 80 (3 Hat) Faks: (0232) 482 09 69 **Ankara VakıfBank Finans Market:** Tel: (0312) 468 83 70 (5 Hat) Faks: (0312) 468 83 78 **İstanbul VakıfBank Finans Market:** Tel: (0212) 252 59 00 (10 Hat) Faks: (0212) 251 94 54 **İzmir VakıfBank Finans Market:** Tel: (0232) 446 29 00 (20 Hat) Faks: (0232) 446 15 52