Geçen sayımızda teknik bir aksaklıktan ötürü "Sonsuz(a) Sevgilerle" yazısı hatalı basıldığından, düzeltilmiş biçimiyle yeniden yayımlıyoruz. Özür dileriz...

Sonsuz(a) Sevgilerle

Az gittim uz gittim, dere tepe düz gittim; 6 ay yaz, 6 ay güz gittim. Bir de döndüm arkama baktım; bir arpa boyu yol gitmişim.

"Sadece iki şey sonsuz: Biri Evren diğeri de insanın aptallığı. Birincisinden o kadar da emin değilim" /**Albert Einstein**

Şu sonsuzun başımıza açtığı işler bitmez. Durup dururken karşımıza çıkıp, bildiğimiz matematik kurallarına ters gelen işler yapar. İsterseniz biraz sıralayalım: Bir kere evrende sonsuz denen bir şey yok. Aklımıza gelebilen her türlü büyüklüğün sonlu olduğunun farkına varalım. Örneğin evrendeki bütün hidrojen atomlarının sayısını düşünseniz, bu sonlu bir sayı. Evet çok büyük, ama yine de sonlu. Tahmini hesaplar bu sayıyı10^{80} civarında buluyor. Yani, ne zaman sonsuzla ilgili bir örnek verilmek istense, hep bir sayı kümesinden örnek veriliyor.

Doğal sayılar kümesinin sayılarının sayısı sonsuzdur. Tek sayılar kümesinin sayıları da öyle, çift sayılar kümesinin sayıları da. N doğal sayılar kümesini, T tek sayılar kümesini temsil etsin.

Küme teorisinden biliriz ki, eğer A ile B iki küme ve A, B'nin 'gerçek alt kümesi' ise, o zaman A kümesinin eleman sayısı, B kümesinin eleman sayısından daha küçüktür. Ve $s(A)<s(B)$ olarak ifade ederiz. Bu bilgimizi uygularsak, $s(T)<s(N)$ olması gerekmez mi? Doğal sayılardan çift sayıları ayırdık, bu nedenle eminiz ki, N kümesi T kümesiyle aynı değil. Bu nedenle de $s(N)=s(T)$ olasılığının düşünülmemesi gerekir.

Peki bu doğru mu? Hayır… N ve T sonlu elemana sahip kümeler olsaydı, s(N) ve s(T) hiçbir kuşkuya kapılmadan söylenebilecek olan bu eşitlik burada geçerli değil.

Daha kötüsü de var: Doğal sayılar kümesi ve sıfırdan oluşan kümeyi ele alalım: Bu kümenin her elemanını, kendisinin 2 katının 1 fazlasına götüren bir eşleme düşünelim: $0\to1$, $1\to3$, $2\to5$... $n\to2n+1$ ... yani doğal sayıların her elemanına karşılık gelen bir tek sayı var. Bire bir eşlenebiliyorlar. O zaman bu iki kümenin eleman sayıları birbirinin aynısı olmak zorunda değil mi?

Çok tuhaf bir sonuç. Buyurun başka tuhaflıklarına sonsuzun: 1 sayısını bilirsiniz. Şu bizim biricik birimiz. Her şey onunla başlıyor. Piano aksiyomlarının "1 vardır" diye var sayıp, bütün sayı sistemlerini üstüne kurduğu 1 sayısı. Şimdi biliriz ki, hangi sayıyı 1 ile çarpsak kendisini elde ederiz. Matematikte bu durumu $n.1=n$ diye gösteriyoruz; n nasıl sayı olursa olsun. Bu durumda $1.1=1$ ya da $1.1.1...1= 1$ olmalıdır. Var mı eksiği, hatası?

[Sonsuza ilişkin paradokslar] sadece, biz sonlu akıllarımızla, sonlu ve sınırlı şeylere verdiğimiz özelliklerle, sonsuzu tartışmaya kalktığımızda ortaya çıkar. /**Galileo Galilei**

Hayır, tamamen doğru... Yerine kaç tane 1 yazarsanız yazın. O halde $1^n=1$ yazmakta bir sorun yok; n ne kadar büyük sayı olursa olsun. Buradan hareketle $1^\infty=1$ diyebilir miyiz? Bir an gözlerimizi kapayıp hayal edelim. Sanki bir olması gerekmez mi? İnsanın, "ben bunun doğruluğunu tümevarımla ispatlarım" diyesi geliyor. Ama yok, doğru değil. Garip bir şekilde bu sayı belirsiz.

Bakın neden: 1/n, n sonsuzken sıfırdır. Bunda kuşkusu olan sanırız yoktur. $1^0=1$ bunda da kuşkumuz yok. Peki $1^{1/n}$ n sonsuzken 1 değil midir? Evet, öyledir.

O zaman $(1^{1/n})^n$ sayısını düşünün şimdi. n sonsuzken 1^∞. $(1^{1/n})^n=1^{n.1/n}=1$ Demek ki n ne kadar büyürse büyüsün, ne olursa olsun bu sayı 1 oluyor. Ama dikkat edelim, hesabımızı $(1^{1/n})^n$ üzerinden yaptık.

Ama bir de şuna bakalım: 1+1/n sayısı n sonsuzken, 1/n sıfır olduğu için, 1'e eşit. $(1+1/n)^n$ ise 1^∞. Bakılım n büyürken bu sayıya neler oluyor:

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,355
4	2,441

Görüldüğü gibi, sayı giderek büyüyor. n çok büyüdüğünde bu sayı 2,71... 'e yaklaşıyor.

Dolayısıyla, 1^∞ nasıl hesapladığınıza bağlı olarak farklı sonuçlar veriyor. İşte bu nedenden dolayı da 1^∞ belirsizdir diyoruz.

Yukarıda Galileo Galilei'nin söylediğine bakın: "Sonlu aklınızla, sonlu için koyduğunuz kural ve ilişkileri sonsuza uygulamaya kalkmayın" diyor. Örneğin aritmetiğin 4 işlemini sonsuza uygulamayı denemeyin; uymaz. Örneğin $1+\infty=\infty$ dur. Bu bizim matematik sistemimize uyar mı?

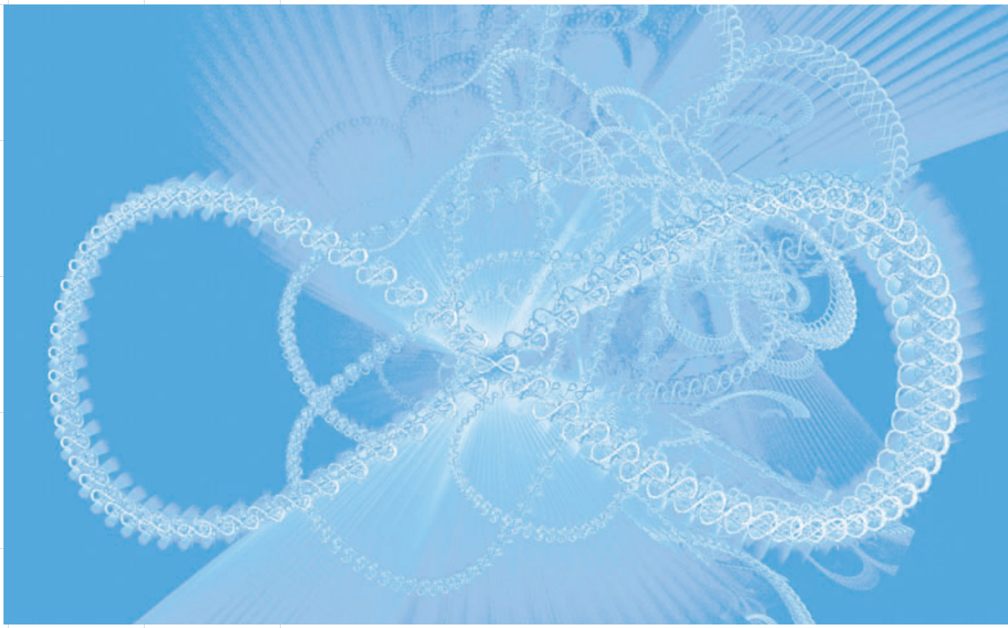
İşte sizlere sonsuzun 4 işlemle uyumsuzluğu:

$\infty+\infty=\infty$
$\infty/\infty\neq1$ (Belirsiz)
$\infty-\infty\neq0$ (Belirsiz)
$\infty.\infty=\infty$
$x.\infty=\infty$ $(x\neq0)$
$0.\infty=???$ (Bilinmiyor)

Eğlence olsun diye $\infty-\infty=0$ kabul edelim, bakın neler olacak: Eşitliğin iki tarafına da 1 ekleyelim: $1+\infty-\infty=0+1$; $1+\infty=\infty$ olduğundan $(1+\infty)-\infty=1$ ve $\infty-\infty=1$ elde ederiz. Yani hem 0'a eşit hem 1'e.

Gördüğünüz gibi, $\infty-\infty$ her hangi bir sayıya eşit olarak da bulunabilir. Aslında sonuç belli değil.

Vakit bulduğunuzda siz de örneğin ∞/∞ ile oynayın. Bakın neler çıkacak.



Sonsuzların sayılabilir olanları, sayılamaz olanları vs gibi Georg Cantor tarafından geliştirilmiş hoş da bir teorisi var. Ama burada buna değinmeyeceğiz.

Gözlerinizi kapayın ve gerçel sayılar ekseninde bir yolculuğa çıkın. Canınız nasıl çekerse; ister her doğal sayıya değerek sekin, ister hoplaya zıplaya 3'te bir, 13'te bir ya da 1000'de bir sayıların üstlerine basarak yürüyün. Ama hayalinizdeki eksende ileriye doğru baktığınızda, sisler içerisinde kaybolup gidişini göreceksiniz. Tıpkı sisli bir havada yolda otomobille giderken olduğu gibi, siz yaklaştıkça sis dağılacak; ne kadar büyük olurlarsa olsunlar, sayılar netleşip size sevimli sevimli el sallayacaklar. Ama ne kadar büyük sayıların yanında olursanız olun, önünüzde sisler içinde kaybolan eksen, arkanızda bir arpa boyu yol.

İşte size sonsuz. Erişilemez büyüklüğü gösteren bir kavram, bir sayı değil. Aklımızdan asla çıkmasın.

Muammer Abalı