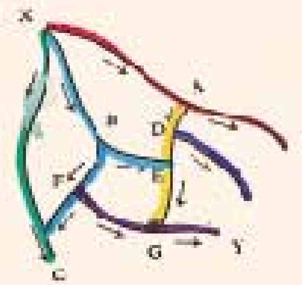
Zekâ Oyunları

Selçuk Alsan

Tek Yönlü Yollar



Şekildeki oto yolları tek yönlüdür ve yönler okla işaretlidir. Buna göre X'den Y'ye kaç türlü gelinebilir?

Esrarengiz Bir Ölüm

Sıcak bir Temmuz günü sabahı, Sakarya Caddesindeki balıkçılardan biri dükkânının üstündeki depoda tavana boynundan asılmış olarak bulundu. İşin garibi oda bomboştu; hiçbir eşya yoktu ve tavan yüksekti. Olaya dedektif Kafacan el koydu. Büyüteçle döşemeyi incelerken orada ince talaş tozlarına rastladı. Hepsi bu. Kafacan olayı çözmüştü. Acaba nasıl?

Mantığın Gücü

Matematik Olimpiyatlarına katılmak için 15 okuldan toplam 100 öğrenci seçildi. Kanıtlayınız ki en az 2 okuldan aynı sayıda öğrenci seçilmiştir.

Kralların İddiası

Üç kral, zekâlarını denemek için tefeci Feci ile bahse tutuştular.

1. Kral- 100 altınına bahse girerim ki bana 500 altın verirsen sana 1000 altın veririm.
2. Kral- 500 altınına bahse girerim ki bana 500 altın verirsen sana 1000 altın veririm.
3. Kral- 1000 altınına bahse girerim ki bana 500 altın verirsen sana 1000 altın veririm.

Tefeci Feci, hangisinin bahsini kabul etmeli? Tefeci Feci hangi kralı en feci duruma soktu dersiniz? Bir diğer deyişle hangi kral, mantığı ve matematiği zayıf olduğu için, zor duruma düştü?

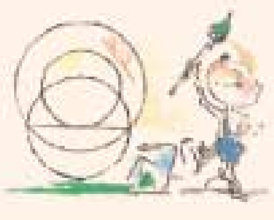
Mantık Uygulaması

Size bir seri önerme veriliyor.

1- İkinci önerme yanlıştır.
2- Üçüncü önerme doğrudur.
3- Dördüncü önerme yanlıştır.
4- Beşinci önerme doğrudur.
5- Birinci önerme yanlıştır.

1. önerme doğru mu, yanlış mı?

Halkanın Alanı



İki eş merkezli daire var. Küçük daireye büyük daire içinde kalan bir teğet çiziliyor. Sonra da bu teğeti çap alan 3. bir daire çiziliyor. Kanıtlayınız ki bu 3. dairenin alanı eş merkezli daireler arasında kalan halkanının alanına eşittir.

Amip Üremesi-I

Bir amipin ikiye bölünmesi 1 saat alsın a) Bir kavanoza M sayıda amip koyalım. 1 saat sonra N sayıda amip bulursak, amiplerin ikiye bölünme olasılığı nedir? (N/M değil).

Amip Üremesi II

Bu amipin soyunu sonsuza dek sürdürme olasılığı nedir?

Tangram

Kaplan mı Hazine mi?

Cin Ruhi ve arkadaşları Mantıkos yıldızında yalnız kafadan ibaret yaratıklara esir düşmüşlerdi. Yaratıkların koca kafalarının altında küçük ayakları vardı. Düşünce yiyor ve düşünce üreterek çoğalıyorlardı. Kahramanlarımız üç kapı önüne getirildiler: A, B ve C. Şu bilgiler verildi: Bu 3 kapının arkasında ya 2 kaplan ve 1 hazine ya da 2 hazine ve 1 kaplan vardır. Kaplanın (veya kaplanların) kapısı üzerinde yazan yanlış, hazinenin (veya hazinelerin) kapısı üzerinde yazan doğrudur.

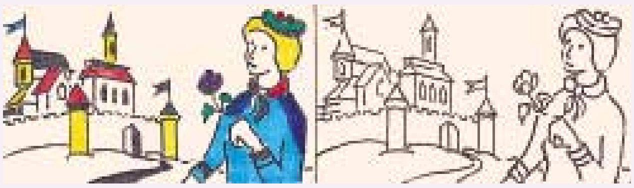
A kapısında yazan: B ve C'nin arkasındakiler aynıdır.

B kapısında yazan: A ve C'nin arkasında kaplan var.

C kapısında yazan: Bu kapının arkasında kaplan yok.

Hatırlatalım ki uzay kaplanları insan yemiyor, bir pençe darbesiyle insanı yürüyen kafaya çeviriyorlardı. Bundan en çok Kafaboş korktu: "Dostlar, ben o zaman balon gibi uçarım; Ruhi ne olur kaplandan koru beni" diyordu. Hazineye ulaşmak için Ruhi hangi kapıyı açtı?

Bellek Testi



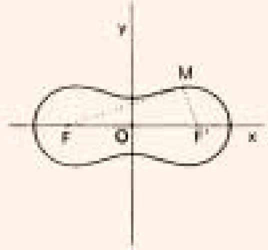
Soldaki resme 2 dakika dikkatle bakınız. Sonra soldaki resmi bir kağıtla kapatıp sağdaki resimde nerelerin hangi renk olduğunu hatırlamaya çalışın (siyah ve beyazlar dahil).

Uydu Fırlatma Hızı

Uzayda uydu taşıyacak bir roketi ekvatordan fırlatmak mı, meridyen doğrultusunda fırlatmak mı daha fazla enerji gerektirir?

İlginç Eğriler

Cassini oval'i



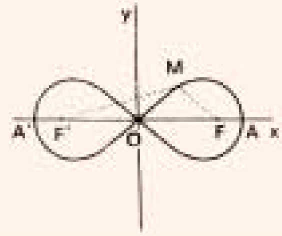
F ve F' gibi sabit iki noktaya olan uzaklıklarının çarpımı k^2 gibi sabit bir sayıya eşit olan M noktalarının geometrik yeridir.

OF = OF' = c.

$(x^2+y^2+c^2)^2 = 4c^2x^2+k^4$.

(Cassini 1747-1845)

Bernouilli lemniskat'ı



$MF.MF' = OF^2$

$(x^2+y^2)^2 = a^2 (x^2-y^2)$

(Bernouilli 1654 - 1705)

100 Kent

Bir ülkede 100 kent var. Rastgele seçilen herhangi iki kent arasındaki uzaklık, yine rastgele seçilen herhangi iki kent arasındaki uzaklıktan farklı. Her kent kendine en yakın kente doğrusal bir yolla birleştirilmiş.

a) Kanıtlayınız ki her kentten en fazla 5 yol çıkabilir.

b) Yollardan bazılarının bir çokgen oluşturması olası mıdır?

Yüklü Parçacıklar

Bir elektrik alanda hareket eden yüklü parçacıkların çizdiği yol, o alanın kuvvet çizgileri doğrultusunda mıdır?

Geçen Ayın Çözümleri

Sonsuzluğu Tadalım

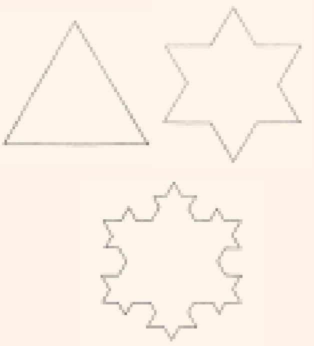
a) Bir eşkenar üçgenin kenarlarını üçe bölün (Şekil 1.). Her kenarın orta üçte birini yeni bir eşkenar üçgenin tabanı olarak alın. Yeni üçgende de aynı işlemi yapın ve buna sonsuza kadar devam edin. İsveçli Helge van Koch'un (kuk okunur) 1914'de bulduğu Koch çokgenini (kar tanesi eğrisi) çizmiş oldunuz. Bu çokgenin kenar sayısı sonsuz, alanıysa sonludur. İlk üçgenin alanı 1 ise Koch çokgeninin alanı 8/5 dir. Üçgenleri dışa değil içe doğru çizerseniz yine kenar sayısı sonsuz ve bu defa alanı 2/5 olan bir şekil bulursunuz. 8/5-5/5=3/5 ve 1-3/5=2/5.

b) Kenarı 1 olan bir küp alalım (Şekil 2.) Küpün her yüzünü 9 eşit kareye bölelim. Her karenin kenarı 1/3 ve alanı 1/9 dur. (şekle bkz). Ortadaki kare yeni bir küpün tabanı olsun. Bu yeni küpün hacmi $1/3^3$ = 1/27 dir. Bu küpde aynı işlemi yapalım ve bu böylece sonsuza kadar devam etsin. Koch eğrisine yaptığımız gibi bunu tekrarlayalım. Sonsuz yüzlü bir şekil elde ederiz. Bu şekil bir küre içine sığar. O halde hacmi sonludur.

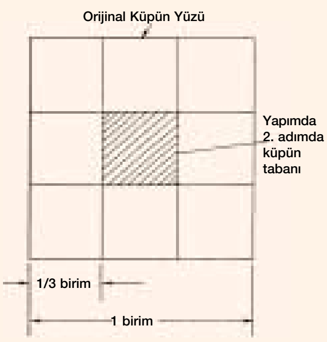
Herhangi bir düzgün çokyüzlü (sekiz yüzlü, on yüzlü, on iki yüzlü, ve yirmi yüzlü) bu şekilde büyütülüp düzgün bir infinihedron haline getirilebilir.

c) Derecesi sonsuz olan açıya α dersek $0 \leq \alpha < 360°$ dir. α 0° ile 360° arasında bütün olası açılara karşılıktır. $\alpha = 1°$, $\alpha = 15°$, $\alpha = 122°$, $\alpha = 250°$, $\alpha = 355°$.... olabilir.

Sonsuzluğu Tadalım



Şekil 1. Koch Eğrisi



Şekil 2. İnfinihedron yapılışı

Yine Mantık

a) Doğru, b) Doğru, c) Yanlış. Minnesota'lı ve çiçekli şapkalı bazı kadınlar Louvre Müzesini gezmektedir; d) Yanlış, e) Yanlış, f) Doğru.

Alo, alo! Adliye Servisi mi?

Mari 27.5, Anna 16.5 yaşındadır. 27.5+16.5=44. 11 yıl önce (T tarihi) Mari 16.5 ve Anna 5.5 yaşındaydı (3 x 5.5 = 16.5). Anna'nın Z tarihindeki yaşı 16.5 x 3 = 49.5 ve 5.5 x 9 = 49.5, 49.5/2 = 24.75 ve 24.75-16.5 + 5.5 = 13.75. 2x13.75 = 27.5.

Dost Sayılar

1210'un alikot bölenlerinin toplamı 1184, 1184'ün alikot bölenlerinin toplamı 1210'dur (Her sayının bölenleri arasında kendisi de vardır. Bir sayının kendisini içermeyen bölenlerine alikot bölenler denir). Örneğin 6'nın bölenleri 1, 2, 3 ve 6'dır. 6'nın alikot bölenleri 1, 2, ve 3'dür. 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210 (bunlar 1184'ün alikot bölenleri). 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184 (bunlar 1210'un alikot bölenleri). Eskiler dost sayıları biliyorlardı. Pisagor "iki dost 220 ile 284 gibi olmalıdır" demişti. 11. yüzyılda bir Arap matematikçisi sevgilisine 220'yi yedirmiş, kendi de 284'ü yiyerek bir çeşit büyü yapmıştı. İncil'de Yakup'un 220 keçisinin olduğu yazar; belki de 284 keçisi olan Esau'nun dostluğunu arıyordu. Euler 1750'de 60 çift dost sayı verdi; fakat ikinci en küçük çift olan 1184 ve 1210'u atlamıştı; bunları 1866'da B.N.İ. Paganini adlı 16 yaşında bir oğlan buldu.

$a = 3\text{-}2^x\text{-}1$; $b = 3.2^{x-1}-1$; $c = 9.2^{2x-1}-1$ (x>1) alalım. a, b ve c asalsa $2^x ab$ ve $2^x c$ dost sayılardır. x=2 için 220 ve 284 bulunur. Birkaç dost sayı çifti verelim: 2620-2924; 5020-5564; 6232-6368; 10744-10856 vb.

Şimdi sürekli olarak alikot bölenleri toplayalım: 20'nin alikot bölenlerinin toplamı= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22; 22'nin alikot bölenlerinin toplamı; 1 + 2+ 11 = 14; 14'ün 1 + 2+ 7 = 10; 10'un 1 + 2 + 5 = 8; 8'in 1 + 2+ 4 = 7 ve 7'nin 1.

Birçok sayı bu işlemlerle 1'e iner; bazılarıysa sonsuza gider. Az önceki 6 toplam s(n), s^2 (n), ..., s^6 (n) olarak gösterilir; burada s^2 kare değil, 2. toplamdır (yukarıdaki örnekte s^2(n) = 14). Şimdi 12496'ya bakalım: s(n) = 14288, s^2(n) = 15472, s^3(n) = 14536, s^4 (n) = 14264 ve s^5 (n) = 12496 = n. Başlangıca döndük. Fakat en ilginci şudur; s^{28}(14316) = 14316. Ayrıntı için Bkz. Recreations in the Theory of Numbers. A. H. Beiler Dover Pub.

Düzgün Çokgen ve Daire

Kenar sayısı 3, 4, 5, 6, 8, 10 veya bu sayıların iki katı olan düzgün çokgenlerin çizimi Pisagor (M.Ö. 530) zamanından beri biliniyordu. Eski Yunanlılar düzgün yedigenin pergel-cetvelle çizilemediğini biliyorlardı. Böylece hangi çokgenlerin pergel ve cetvelle çizilebileceği araştırılmaya başlandı. Bu soruya ancak Gauss (1777-1855) yanıt verebilmiştir. Fermat sayıları ile bu konu yakından ilgilidir. $2^{2^n}+1$ şeklindeki sayılara Fermat sayıları denir; Fermat bütün bu gibi sayıların asal olduğuna inanıyordu. Gerçekten n=0 için 3, n=1 için 7, n=2 için 17, n = 3 için 257 ve n=4 için 65537 asal sayılarıdır. Fakat n=5 için $2^{2^5}+1$ sayısının (2^{32}+1) asal olmadığı Euler tarafından kanıtlandı. Pergel ve cetvelle çizilebilen düzgün çokgenler, kenar sayısı Fermat sayıları olanlardır; yani düzgün üçgen, beşgen, 17 gen, 257 gen ve 65537 gendir. (Ne kadar esrarengiz bir olgu: 2^{2^n} ile bir çokgenin cetvel ve pergelle çizilebilmesi arasında nasıl bir ilişki olabiliyor?); Aslında Gauss teoremine göre m bir tamsayı ve p1, p2, p3 ... Fermat sayıları olmak üzere, kenar sayısı 2^m.p1.p2.p3...pk olan bütün çokgenler pergel ve cetvelle çizilebilir; yani Fermat sayıları esas olmakla birlikte çizilebilen çokgen sayısı 5'in çok üstündedir. Örneğin 2^4.3.7 = 16.21 = 336 kenarlı düzgün bir çokgen de cetvel ve pergelle çizilebilir. Böylece 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34... kenarlı çokgenler çizilebilir; 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33 ... kenarlı çokgenler çizilemez.

Bir çokgenin etrafına çevrel çember çizilebilmesi (veya bir daire içine bir çokgen çizilebilmesi) dairenin n eşit parçaya ayrılabilmesiyle olasıdır; böylece 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 45, 60, 90 ... kenarlı çokgenler daire içine çizilebilir (360, bunların herbiriyle bölünebilir).

Hedefler

Kenarları 2 km olan bir eşkenar üçgenin çevrel çemberini çizelim. Pergeli 2 km açıp A, B ve C noktalarına koyarak BC, AC ve AB yaylarını çizelim. Tanklar beyaz alanda olmak zorundadır (nedenini düşününüz). Dairenin yarıçapı Pisagor'a göre ve yükseklikler birbirini 1/3 h, 2/3 h şeklinde keser kuralı gereğince $\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.15$ km olmalıdır.

Saf Mantık

Tek sayılı sıralardaki siyah kare kümesine A, çift sayılı sıralardaki siyah kare kümesine B, tek sayılı sıralardaki beyaz kare kümesine C diyelim, A, B ve C kümelerindeki taşların toplam sayısı sırasıyla n, m ve k olsun. 1, 3, 5 ve 7. sıraların her birinde tek sayıda taş var. A ve C kümelerinin toplamı 1, 3, 5 ve 7. sıraların toplamını verir (A kümesi 1, 3, 5 ve 7 sıraların siyahlarını, C kümesi 1, 3, 5 ve 7. sıraların beyazlarını verir. Bu ikisi bir arada 1, 3, 5 ve 7'nin bütün karelerini verir). 1, 3, 5 ve 7'nin herbirinde tek sayıda taş olduğundan, dört tek sayının toplamı ise çift olacağından, n+k çift olmak zorundadır. B ve C kümelerinin toplamıysa b, d, f ve h sütunlarının toplamını verir (1b, 3b, 5b ve 7b beyaz ve 2b, 4b, 6b, 8b siyah; bunların toplamı b sütununu verir; aynı mantık d, f ve h sütunları içinde geçerli). Bu nedenle m+k çift olmak zorundadır (4 tek sayının toplamı çifttir).

n+k = 2a ise (çift) ve m+k = 2b ise (çift)

n+k+m+k = 2a+2b ve m+n = 2 (a+b-k). Demek ki m+n çifttir; yani tahtanın siyah karelerinde (A ve B kümelerinin toplamı tahtanın bütün siyah karelerini verir) çift sayıda taş vardır.

Çılgınca Oyunlar

a) 1. oyuncu kırık çizgiyi aşağı doğru devam ettirdiği sürece oyunu kaybedemez. Hamle yapılamadığı zaman, kırık çizgi kendi üstüne kapanmış demektir. Kırık çizgi yalnız çift sayıda hamleden sonra kapanır. Bu nedenle 2. oyuncu ne yapsa oyunu kaybetmez. (2n. hamleyi 2. oyuncu yapıp kırık çizgiyi kapatır; 1. oyuncu artık hamle yapamaz ve kaybeder).

b) 1. oyuncu tek n ile, 2. oyuncu çift n ile kazanır. Her düğüme, o düğümden çıkan kesilmemiş iplerin sayısını yazalım. Bu sayıların toplamı nxn karelik ağ için 3.4(n-1) + $4(n-1)^2$ olacaktır; bu, 4'e bölünür. Ağı ikiye bölmeyecek maksimal kesi sayısı $2n^2$ + 4n-8'dir. Bu ifade n tek ise 4'e bölünmez, çiftse bölünür. Her kesiş düğüm sayısını 2 azaltır.

Tangram

10 Çift Çizme

En fazla 5 kişi çizmesiz kalabilir. Bütün ayaklar aynı büyüklükte olsaydı kimse çizmesiz kalamazdı. Bunun tam aksi, en kötü olasılık, her ayağın farklı büyüklükte oluşudur. Çizmelerin büyüklük sırasını 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 ile gösterelim.

1, 10'un; 2, 9'un; 3, 8'in 4,7'nin; 5, 6'nın çizmesini giyer; geriye 1, 2, 3, 4, 5 No lu çizmeler ve ayağı 6, 7, 8, 9, 10 olanlar kalmıştır. 6, 7, 8, 9, 10 tabii ki çizmesiz kalır.

Tutuklu İkilemi

A itiraf ederse 5 veya 10 puan alır; yani ya hafif bir hapis yer (5 puan) ya da serbest kalır (10 puan), A susarsa ya orta derecede bir hapis ya da ağır hapis yer. B için de benzer mantık geçerlidir. O halde ikisinin de en lehine olan durum itiraf etmektir. Bu kararı almak için görüşmelerine gerek yoktur; mantıkla bu sonuca varılabilirler.

A ve B'nin davranışları	A itiraf eder	A susar
B itiraf eder	Durum iyice: 5 puan	Durum kötü: -10 puan
B Susar	Durum iyi: 10 puan	Durum orta : 0 puan