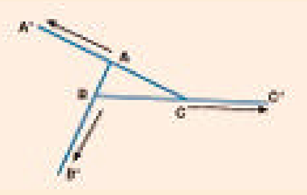
Zekâ Oyunları

Selçuk Alsan

Yıldızlı Bilmece



Size bir süper-bilmece soruyoruz. Alfa, Beta ve Cura yıldızları 1789 yılında A, B ve C pozisyonlarını işgâl ediyorlardı. Astronomlar bu üç yıldızın aynı düzlemde kalarak ve şekilde görüldüğü gibi doğrusal bir yol izleyerek sabit bir hızla birbirlerinden uzaklaştığını gördüler. Her 10 yılda bir Alfa yıldızı CA, Beta yıldızı AB ve Cura yıldızı BC kadar yol alıyordu. Son gözlemde bu üç yıldız bir üçgenin A^1, B^1 ve C^1 köşelerini oluşturuyorlardı. $A^1B^1C^1$ üçgeninin alanı ABC üçgeninin alanının 1027 katı idi. Bu son gözlemin tarihi neydi?

Uzayca

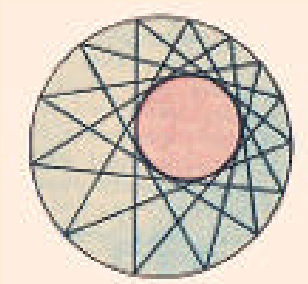
Cin Ruhi Darwinos yıldızına vardığında bir uzaylıya "burada neler oluyor?" diye sordu. İnsanla maymun arası bir canlı ona şu kâğıdı uzattı: 1) Zorkun olunmadan kamçak olunamaz. 2) Şomşunların içinde biklos olmayan yoktur. 3) Bastionlar arasında her türlü kamçak bulunur. 4) Hiçbir dobarson biklos değildir. 5) Dobarson olmamak, bastion olmamaktır. 6) Bütün bikloslar zorkundur. 7) Bazı şomşunlar bastion değildir.

Maymun adam yeşil canavarın üstünden Ruhi'nin omuzuna sıçrayıp konuşuverdi: "Ey bilimden başka kuvvet bilmeyen /Ve yalanlar önünde eğilmeyen/ Yüzünde doğruluktan gelen acı/ Darwinos'a hoş geldin yabancı!". Ruhi hem şaşırmış, hem de mutlu olmuştu. Ta ki maymun adam ona "ya bu şifreyi çözersin ve yeşil canavarı ezersin, ya da vasiyetini yazarsın" diyene kadar. Yukardaki 7 cümleden istediklerini atarak ortaya anlamlı bir metin çıkarması isteniyordu *(100 Jeux pour insomniaques, P. Berloquin'den).*

1000. Terimi Bulmak

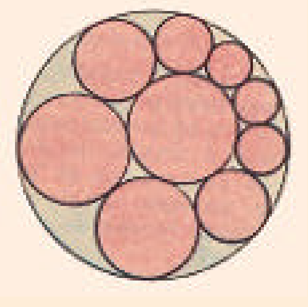
$a_1 = 3^{1996}$ verilmiş. a_1, a_2, a_3,..., a_n öyle bir dizi olsun ki her a_{n+1}, a_n sayısının hanelerinin toplamı olsun. Örneğin $a_1 = 3^{12} = 531441$ ise $a_2 = 5+3+1+4+4+1 = 18$; $a_3 = 1+8 = 9$ vb olsun. Böyle bir dizinin 1000. terimi nedir? *(Olimpiyad Problemleri, H.İ. Karakaş ve İ. Aliyev, TÜBİTAK 1996)*

Poncelet Teoremi



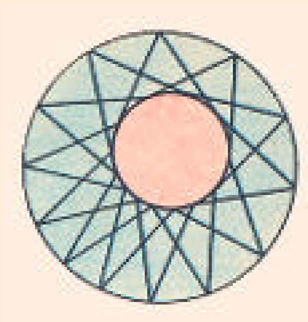
İçiçe iki daire alalım. Dış daire üzerindeki bir noktadan iç daireye bir teğet çizelim. Bu teğetin dış daireyi kestiği noktadan iç daireye yeni bir teğet çizelim. Bu yeni teğetin dış daireyi kestiği noktadan iç daireye yeni bir teğet çizelim vb. Diyelim ki böyle devam ederek sonunda başladığımız noktaya döndük; yani sonuncu teğetimiz dış daire üzerinde ilk aldığımız noktadan geçti. Son çizdiğimiz teğetin ilk noktadan geçmesi için dış daire üzerinde hangi noktadan çizime başlamalıyız? *(Kvant'dan)*

Steiner Teoremi



Bir düzlemde birbirini kesmeyen içiçe iki daire alalım. Her iki daireye teğet olan bir daire çizelim ve buna "daire 1" diyelim. Şimdi de verilen ilk iki daireye ve "daire 1"e teğet olan bir daire çizelim; buna "daire 2" diyelim. "Daire 3" verilen ilk iki daireye ve "daire 3"e teğet olacaktır vb. Bu işlemlere devam ettik ve daireler zinciri kapandı diyelim. "Daire 1"i nasıl alalım ki zincir daima kapansın?". *(Kvant'dan)*

V.L. Black Teoremi



İçiçe iki daire alalım. Pergelin ucunu dış daire üzerinde rastgele bir noktaya koyup iç daire üzerinde bir noktayı işaretleyelim. Şimdi pergelin açıklığını bozmadan bu noktadan dış daire üzerinde bir noktayı işaretleyelim ve bu noktadan devam edelim. Bunun sonucunda dış dairede ilk başladığımız noktaya döndüğümüzü ve zigzag çizginin kapandığını varsayalım. Dış dairede nasıl bir noktadan çizime başlarsak başladığımız noktaya dönebiliriz?

(Kvant'dan)

Süper Tiyatro Problemi

Size olağanüstü düşündürücü bir problem sonuyoruz. $A, B, C, D, E, F, G, H, İ, J, K$ gibi 11 tiyatro artisti turneye çıkıyor. Artistlerin bir bölümü sahnedeyken bir bölümü de oturup onları seyrediyor. Bu 11 artistten sahnedekileri ve oturup seyredenleri öyle düzenleyiniz ki 6 gün sonra 11 artistten her biri diğer 10 artisti sahnede seyretmiş olsun. Bir örnek: 1. gün sahnede, A, B, C, D *ve* E oynuyor ve F, G, H, $İ$, J, K seyrediyor. Ertesi gün sahnedekiler ve oturup seyredenler farklı kişilerdir; örneğin G, A, K, D, H, J sahnededir ve B, C, E, F, $İ$ seyircidir vb.

Matematiği İnsan Aklını Onurlandırmak İçin Seçtim...

Bu söz kimindi? Bu problemi çözerken ona hak veriyor musunuz? Problemimiz gerçekten dahiyane bir buluş. Öyle ki insan ilk duyuşta "bu mümkün değil" diyor. Yalnızca üç adet 2 sayısı ve istediğiniz (hiçbir sınır yok) matematik işlemleri kullanarak 1'den + ∞'a kadar bütün pozitif tam sayıları elde edebilir misiniz? Çözmek için lise matematiği yeterlidir (Bu problemi İngiliz Fizikçisi Paul Dirac düşünmüştür).

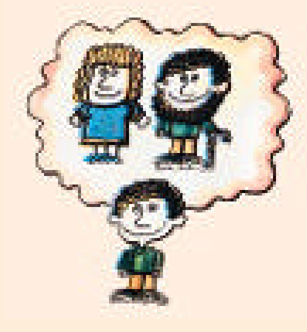
4'lü Bilmece

4 adet 4 ve +, -, x, :, √, üs ve faktöryel kullanarak 1'den 20'ye kadar olan sayıları oluşturun. Örneğin 2= 4/4 + 4/4.

Cinli Bir Sayı

Elimizde 20 basamaklı bir sayı var. Bu sayıya N diyelim. N'in 20 basamağının toplamı 10'a eşit. Bu N sayısını 7 ile çarpıp 7 N sayısını buluyoruz; 7 N sayısının basamaklarının toplamı 70 yapıyor. 19 N sayısının basamaklarının toplamıysa 19 yapıyor. Bu 20 basamaklı sayıyı bulunuz *(Kvant'tan).*

Cinnoşla Minnoş



Cinnoş şöyle diyor: "Kızkardeşim Minnoş ile ikimizin yaşlarının toplamı 26. Ben onun bugünkü yaşının 3 katı yaşa geldiğim zaman, onun yaşı, benim bugünkü yaşımın 5 katı ile benim o günkü yaşımın farkına eşit olacak. Cinnoş'la Minnoş kaç yaşlarında?

En Zor Yıl

Milattan sonra *bd*. yüzyılın ikinci yarısındaki *abcd* yılını bulunuz. Çözüm yok gibi görünüyor; fakat iki çözüm var.

Japonesk

Aynı sayılar aynı harflere karşılıktır. Sayıları bulunuz.

Bir Mantık Sorusu

Üç fincandan birinin altında bir madeni para var. Siz fincanlardan birini seçiyorsunuz. Ben paranın nerede olduğunu biliyorum ve altında para olmayan bir fincanı seçiyorum. Siz de benim altında para olmayan fincanı aldığımı biliyorsunuz. Siz isterseniz elinizdeki fincanı tutuyorsunuz, isterseniz 3. fincanı alıyorsunuz. Elinizdeki ilk fincanı tutarsanız parayı bulma olasılığınız nedir, üçüncü fincanı alırsanız parayı bulma olasılığınız nedir? *(İnternet, Ask Dr. Math'dan)*

Uzayda Garip Canlılar

4000 yıllarına doğru uzayda canlı moleküller bulunduğu keşfedildi. Bunlar özellikle metaller üzerinde birikiyorlardı. Başlangıçta a gram metal varsa, bu metalin ağırlığı üzerine üşüşen canlı moleküllerle şu şekilde değişiyordu: $a' = (1+a/x)^x$. Örneğin a=10 g olsun ve metale 2 birim canlı molekül yapışsın; metalin yeni ağırlığı $a' = (1+10/2)^2 = 36$ oluyordu. Bilim adamları şunu bilmek zorundaydı: Metale çok büyük sayıda canlı molekül yapışırsa metalin ağırlığı sonsuza yaklaşır mıydı? *(Matematik Dünyası 1 (1): 22; 1991; 1, 2, 3, ∞ veya sürat felakettir. Tosun Terzioğlu'ndan. Somutlaştıran Selçuk Alsan).*

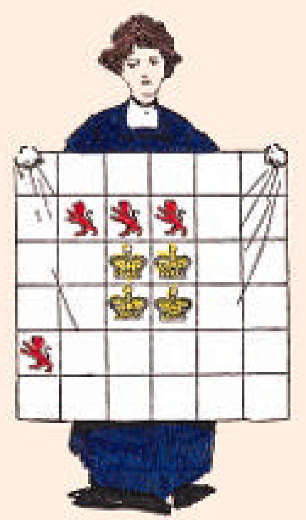
Çokyüzlünün Yüzleri

Elinizde dışbükey (konveks) bir çokyüzlü var. Bu çokyüzlünün yüzlerinden ikisinde kenar sayısının aynı olduğunu kanıtlayın *(Moskova 1973 Matematik Olimpiyatlarından).*

Bir Üçgenin n'de Biri

Bir üçgenin alanının n'de biri (örneğin 1/20'si, 1/50'si vb) çizimle nasıl elde edilir?

Aslanlar ve Taçlar



Peri Perihan, Cin Ruhi'nin kendisine doğum gününde hediye ettiği kocaman eşarp karşısında şaşırıp kaldı. "Ben o kadar koca kafalı mıyım Ruhi?" dedi. Ruhi ise keyifle gülüyordu: "Kafanın dışını bilemem, ölçmedim. Ama şimdi kafanın içini ölçeceğiz. Bu 6x6 karelik eşarbı düşey ve yatay çizgiler boyunca öyle 4 eşit parçaya ayır ki her parçada bir aslan ve bir taç bulunsun. Böylece annene ve kızkardeşlerine de birer eşarp vermiş oluruz". Gerçekten zor bir problem. Peri Perihan'ın öfkesinden eşarbı parça parça ettiği rivayet edilir. Haydi bakalım, kurşun kalem ve silgi alıp bir de siz deneyin.

Küplerin Farkı

İki ardışık sayının küplerinin farkı nasıl bir sayıdır?

Bir Oylama Problemi

İşçiler grev oylaması için toplanmışlardı. Sendika başkanı şöyle dedi: "Greve evet diyenler ayakta dursun; greve hayır diyenler ise otursun". Ayakta duranlar sayıldıktan sonra başkan sonucu ilan etti. "Evet diyenlerle hayır diyenler arasındaki fark, hayır diyenlerin dörtte biridir; çoğunluk evet demiştir". Salondan itiraz sesleri yükseldi: "Fakat içimizden bazıları hayır demek istediği halde sandalye olmadığından oturamadı". Başkan hayır demek isteyip de oturamayanları saydı; bunlar 12 kişiydi. Başkan sonucu yeniden ilan etti: "Az önceki yanlış sayıma 12 hayır eklediğimde, hayır sayısı evet sayısının 1 fazlası oldu. Grev reddolunmuştur".

Salonda toplam kaç işçi vardı?

İnsanı Çarpan Çarpım

Bir gün Cin Ruhi, Kafaboş'a biraz takılmak istedi. "Einstein! Haydi şu sayıyı 30 saniye içinde 2 çarpana ayır bakalım : 111 111 111”. Ruhi bir saat sonra döndüğünde ortada sonuç yoktu; fakat nasıl olmuşsa olmuş, stres sonucu Kafaboş'un ağzı, boynu ve gözleri çarpılmıştı. Ruhi çözümü söyleyince Kafaboş'un yüzü gözü düzeldi.

Birdirbir Oyunu

$$S_n = 1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots11}_{n\ \text{tane}}$$

toplamını bulunuz.

Kırık Plaklar

Bir gün Ruhiye Cin Ruhi'ye sordu: "Klasik batı müziği plakların duruyor mu?”

Ruhi: "Hayır. Bendekilerin yarısı +yarım bir plağı Solen'e verdim. Kalanların yarısı + yarım bir plağı Şahsene'ye verdim." Ruhiye: "Bana vermek aklından geçmedi tabii" dedi. Ruhi: "Bende 1 tane kaldı. Başlangıçta kaç plağım olduğunu bilirsen onu sana vereceğim".

Ruhi'nin kaç klasik batı müziği plağı vardı.?

20 Basamaklı Sayı

20 basamaklı bir sayının 64. dereceden kökü nedir?

Daire İçi Dörtgen (Ptolemeus Teoremi)

Bir daire içine çizilmiş bir dörtgenin (kirişler dörtgeni), köşegen uzunluklarının çarpımının, dörtgenin karşılıklı kenarlarının çarpımının toplamına eşit olduğunu kanıtlayın.

İki Kare Farkı

İki kare farkı olan bir sayıyı nasıl elde edersiniz?

$2^{4n+2}+1$'in Gizemi

$(2^{4n+2}+1)$ ifadesini her biri 3 terimli iki parantezin çarpımı olarak ifade edin.

Karelerin Terslerinin Toplamı

$1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+1/6^2+\ldots$ serisi sonsuza giderken toplam neye eşit olur?

Tangram: Çinliler

Dörtgenin Alanı

Bir dış bükey dörtgenin alanı S ve kenarları *a*, *b*, *c* ve *d* ise şu eşitsizliği kanıtlayın:

$$S_{ABCD} \le \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$

Geçen Ayın Çözümleri

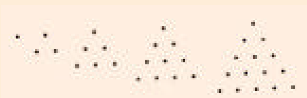
Kare ve Küp Farkları

a) Tek ardışık sayılar dizisi: 1,3,5,7,9,...

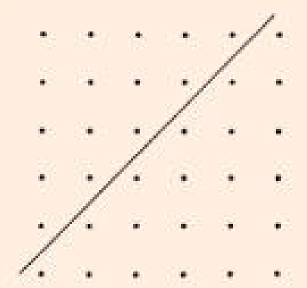
b) 0,1,3,6,10,15,21,... Üçgen Sayılar dizisidir. Üçgen sayılar dizisi şöyle buhunur: 1= 0+1,

3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4, 15=1+2+3+4+5, 21=1+2+3+4+5+6. 1'den n'e kadar olan sayıların toplamı n(n+1)/2 formülüyle bulunur. Bu formül aynı zamanda üçgen sayıları verir. 1=1x2/2, 3=2x3/2, 6=3x4/2, 10 = 4x5/2,... Neden üçgen sayı denmiş? Bir örnekle belirtelim: Yan yana teğet 5 daire çizin; bunun üstüne 4, 4'ün üstüne 3, 3'ün üstüne 2, 2'nin üstüne bir daire oturtabiliriz. Oluşan şekil bir eşkenar üçgenin içine sığar; üçgenin her kenarı 5 daire içerir. Ardışık 2 üçgen sayının toplamının kare olduğuna dikkat ediniz: $0+1=1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $3+6=9=3^2$, $6+10=16=4^2$,

Üçgen Sayılar



Komşu üçgen sayıların toplamının kare yapısının geometrik gösterilişi: Sol üst bölgede 5+4+3+2+1=15 nokta, sağ alt bölgede 6+5+4+3+2+1=21 nokta var. 15 ve 21 nokta birleşerek 6x6=36 nokta içeren bir kare oluşturmuş.



T bir üçgen sayıysa $8T+1$ daima bir kare sayıdır. Ispatı kolay: T_n= $[8n(n+1)/2]+1 = (2n+1)^2$.

(n. üçgen sayı = $n(n+1)/2$).

Üçgen sayıların karelerinin farkları daima bir küptür:

T	1	3	6	10	15	21	...
T^2	1	9	36	100	225	441	...
Farklar	8	27	64	125	216	...	

Bunun da ispatı kolay:

$$T_n^2 - T_{n-1}^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$$
$$= n^3$$

Bir üçgen sayının karesinden, o üçgen sayının solundaki ve sağındaki üçgen sayıların çarpımını çıkartırsanız o üçgen sayıyı bulursunuz:

Üçgen sayılar *(T)*	1	3	6	10	15	21	...
Kareler (T^2)	1	9	36	100	225	441	...
$T^2 - (T_{n+1} . T_{n-1})$	1	3	6	10	15	21	...

[3 = 9 -(1x6); 6= 36 -(3x 10); 10 = 100 - (6x15)

Bunun ispatı da şöyle:

$$T_n^2 - (T_{n+1}\ T_{n-1})$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ \frac{n(n-1)}{2}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

9'un kuvvetlerini toplayıp 1 eklersek bir üçgen sayı buluruz:

$1+9=10=T_4$, $1+9+9^2=91=T_{13}$, $1+9+9^2+9^3=820=T_{40}$,...

Mantıkorama I

1,3,5,7, ve 8'i atın. 2,4,6,9 ve 10 doğrudur.

Mantıkorama II

4'ü atalım.

1) Atub'ların hepsi Bisman'dır.

2) Bisman'ların hepsi Krislof'dur.

3) Krislof'ların hepsi Dondar'dır.

O halde Atublar'ın ve Bisman'ların hepsi Dondar'dır.

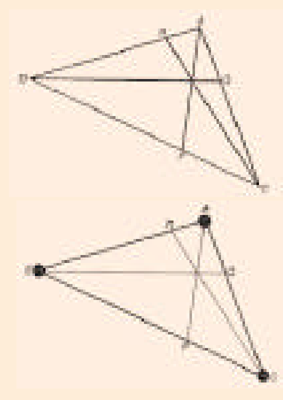
Şehirler

Paris, Tahran, Pekin, Cakarta, Kualalumpur, Moskova, Delhi, Barselona, Dakar, Rabat, Amsterdam, Vladivostok.

Açıkgöz Lokantacı

Lokantacı şunu söyledi: "Madem kural bu, siz dedelerinizin yediklerinin parasını ödeyeceksiniz!"

Ceva Teoremi



Ceva teoremi şunu söyler. *(AR/RB).(BP/PC).(CQ/QA)*=1. Burada *BP/PC*=2/1, *CQ/QA*=2/1 ve *(AR/RB)*.4=1. Buradan *AR/RB*=1/4. Bunu dolaylı olarak şöyle ıspatlayabiliriz. Üçgenin köşelerine W_A, W_B, ve W_C ağırlıklarını asalım. Ağırlıkları öyle seçebiliriz ki W_B/W_C = *CP/PB* olur. Bu, *P*'nin *B* ve *C*'deki ağırlıkların ağırlık merkezi olması demektir.

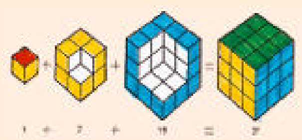
Bu durumda üç ağırlığın ağırlık merkezi *PA* doğrusu üzerinde olmalıdır. *B*'ye 1, *C*'ye 2 ve *A*'ya 4 birim ağırlık koyalım. *Q* noktası *A* ve *C*'nin ağırlık merkezi olur ve her üç ağırlığın ağırlık merkezi *QB* doğrusu üzerinde olur. *AP* ve *BQ*'nun kesişme noktasından ve *C*'den geçen çizgi *AB*'yi *R*'de keser. *R*, *A* ve *B*'nin ağırlık merkezidir. *A*'da 4, *B*'de 1 birim ağırlık olduğundan *AR/RB*=1/4'tür; çünkü, 4x*AR*=1x*RB*'dir (ağırlık merkezi yasası).

Tavşanaççi Problemi

Fibonacci'nin (XII. yüzyıl, İtalya) bulduğu bu problemin cevabı Fibonacci sayılarıdır. Serinin ilk iki sayısı 1'dir. (F_1=1, F_2=1). Üçüncü terimden itibaren her Fibonacci sayısı kendinden önceki 2 terimin toplamıdır: $F_3=F_1+F_2=1+1=2$. $F_4=F_2+F_3=1+2=3$, $F_5=F_3+F_4=2+3=5$, ... Fibonacci serisinin ilk 14 sayısı şunlardır:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144, 233, 377. Biz ilk 12 sayının (1 yıl=12 ay) toplamını arıyoruz. Bunun için uzun uzun toplama yapmamıza gerek yok. Fibonacci serisinde n terimin toplamı = $F_{n+2}-F_2$'dir. Burada $F_{n+2}=F_{12+2}=F_{14}$= 377 ve F_2 =1; böylece ilk 12 terimin toplamı $=F_{14}-F_2$=377-1=376. Yıl sonunda 376 çift tavşanınız olacaktır.

Mahavira Problemi



1,7,19,37,61,... sayılarına dikkat edelim: 1= 0+1, 7=6+1, 19=(6x3) +1

37 = (6x6) +1, vb. Bunlara Mahavira sayıları *(M)* diyelim.

Örneğin, 37'yi alalım, 37= 1+ (1x6) + (2x6) +(3x6).

$M=1+6[1+2+3+...+(n-1)] =1 +6T_{n-1}$. [$T_{n-1}$, *(n-1)*. üçgen sayıdır; yani 1'den *(n-1)*'e kadar olan sayıların toplamıdır).

$T_{n-1}=(n-1)\ n/2$'den $[1+6T_{n-1}]=1+6[n(n-1)/2] =3n^2-3n+1$.

Bu formülle Mahavira sayılarını bulabiliriz: n=1 için M=1, n=2 için M =7, n=3 için M=19, n=4 için M=37 vb.

Şimdi şuna dikkat edelim: $3n^2-3n+1=n^3-(n-1)^3$.

O halde ilk *n* Mahavira sayısı şöyle de yazılabilir:

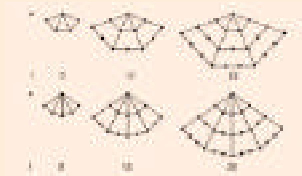
$n^3-(n-1)^3$, $(n-1)^3-(n-2)^3$, ..., 4^3-3^3, 3^3-2^3, 2^3-1^3, 1^3-0^3 (Bunlar $3n^2-3n+1$, ... 37, 19, 7, 1 sonucunu verirler). *n* Mahavira sayısının toplamı n^3'ü verir: $1+7+19=27=3^3$;

$1+7+19+37=64=4^3$vb.

Mahavira sayıları ardışık doğal sayıların küplerinin farkıdır. Küpler: 0,1,8,27,64,125,... Farklar: 1, 7, 19, 37, 61,... Mahavira sayılarından 1 çıkarıp 6'ya bölelim. (0x6), (1x6), (3x6), (6x6), (10x6)... elde ederiz. O, 1, 3, 6, 10, ... üçgen sayılardır.

Mahavira sayılarıyla altıgen sayıların ilişkisi, Altıgen sayılar: 1,6,15, 28,45,... ve Mahavira sayıları $1+0^2=1$, $6+1^2=7$, $15+2^2=19$, $28+3^2=37$, $45+4^2=61$,... Genel olarak altıgen sayıyı A_n ile gösterirsek $M=A_n+(n-1)^2$ dir. Altıgen sayıyı veren formülü bulalım: $An=3n^2-3n+1-(n-1)^2=2n^2-n$. O halde $An=2n^2-n$. n=1 için A_n=1, n=2 için A_n=6. n=3 için A_n=15, n=4 için A_n =28, n=5 için A_n=45, ... vb.

Üçgen piramid şeklinde yığılmış kürelerin sayısı, taban kenarında n küre varsa $T_1+T_2+T_3+...+T_n$'dir; yani 1'den n'e kadar olan üçgen sayıların toplamıdır. $Tn=n(n+1)/2$. Örneğin bir kenarında 5 küre bulunan bir üçgen piramiddeki küre sayısı= $T_5+T_4+T_3+T_2+T_1$= 15+10+6+3+1=35 (T_5=5.6/2=15), T_4=4.5/2=10,... vb) (Bunu şöyle de yazabilirdik; (1+2+3+4+5)+ (1+2+3+4) + (1+2+3) + (1+2)+1 =35).



Üstte beşgen sayılar (1,5,12,22,...)
Altta altıgen sayılar (1,6,15,28,...)

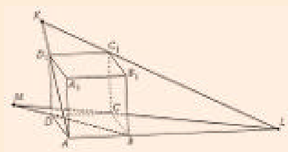
6 Çember Problemi

5 özel daire aynı bir *Q* noktasında kesişiyor; siyah noktalar bu 5 dairenin merkezleridir. Altıncı daire (siyah noktalı ve ince çizilmiş) çevresi üstünde bu 5 dairenin merkezlerini içeren dairedir.

5 Çember Problemi

Bu dört üçgenin çevrel çemberleri aynı 0 noktasında kesişir. Bu çevrel çemberlerin merkezleri (siyah noktalar) bir başka 5. daire üzerindedir. Çok zevkli olan bu çizimi yapmalısınız.

Kırıklar



A K L M B B_1A_1 Kırık çizgisi *A B C D* $A_1B_1C_1D_1$ küpünün bütün köşelerinden geçer. (D_1, *AK*'ya, C_1, *KL*'ye ve *D MB*'ye aittir).

Eşitlik

Karenin alanı *S* olsun. O zaman soldaki beyaz alanlarla sağdaki kırmızı alanların toplamı *S*/2 olur. Soldaki dik üçgenin alanı da *S*/2'dir. O halde mavi alanların toplamı, kırmızı alanların toplamına eşittir. Sol beyazlara *B*, mavilere *M* ve kırmızılara *K* diyelim.

$B_6+B_4+B_2+K_6+K_4+K_2=S/2$ ve

$B_6+B_4+B_2+M_5+M_3+M_1=S/2$ ve buradan

$K_6+K_4+K_2=M_5+M_3+M_1$

1000 Altın Para

1000 parayı 500+500 olarak ayıralım ve ağırlıklarını karşılaştıralım. İki olasılık var (I. tartı):

A- Kefeler eşit değil. Demek ki yalancı para var ve yalancı paralar aynı kefede (her kefede 1 yalancı para olsaydı denge bozulmazdı). Şimdi ağır gelen kefedeki 500 parayı 250+250 olarak kefelere koyalım (II. tartı). Kefelerden biri ağır basarsa yalancı para veya 2 yalancı para oradadır. Sonuç: Yalancı paralar vardır ve diğerlerinden ağırdır. Baştan tartı gerekmez. Kefeler dengede kalırsa iki olasılık ortaya çıkar:

a) Yalancı para(lar) teraziye konmayan 500 para arasındadır ve hafiftir

b) İki yalancı para vardır; bunların biri sağ, biri sol kefededir. Karar vermek için bu 250 paralık yığını 125+125 diye ikiye ayıralım ve kıyaslayalım (3. tartı). Terazi dengede kalırsa a şıkkı söz konusudur; yani yalancı para teraziye konmayan 500 para arasında ve hafiftir. Bir kefe çökerse yalancı para vardır ve ağırdır.

B- Kefeler dengededir. O zaman ya yalancı para yoktur veya her kefede 1 yalancı para vardır. Kefelerin birindeki 500 yalancı parayı 250+250 diye ayırıp yine tartalım. İki olasılık vardır: a) Kefeler dengededir. O zaman yalancı para yokmuş diyebiliriz.

b) Kefelerden biri aşağı, biri yukarı gitmiştir. 3. tartıda ağır gelen kefedeki 250 parayı 125+125 olarak teraziye koyarız. 1) Kefeler dengede kalır. O zaman yalancı para, bıraktığımız hafif gelen 250 para arasındadır ve hafiftir. 2) Bir kefe aşağı gider. O zaman yalancı para burada ve normalden ağırdır.

Pisagora Ek Teorem

Bu üçgenlerin taban ve yükseklikleri, orijinal diküçgenle aynıdır; bu nedenle herbirinin alanı, orijinal diküçgen kadardır.

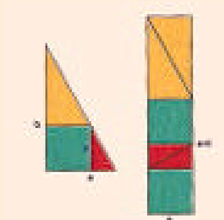
Toplamalar

$S_5=n^2(n+1)^2\,(2n^2+2n-1)/12$.

Şu Diafantin denklemi çözmemiz gerekir: $2n^2+2n-1=3y^2$ (S_5 formülünde $2n^2+2n-1$ yerine $3y^2$ yazılırsa $S_5=n^2(n+1)^2y^2/4$ olur. Bu tam bir karedir).

En küçük kök $n=13$'tür. $S_5=1^5+2^5+\ldots+13^5=1002001=1001^2$. Bu gibi diğer sayılar 133, 1321, 13081, 129493,...

Liu Hui Problemi



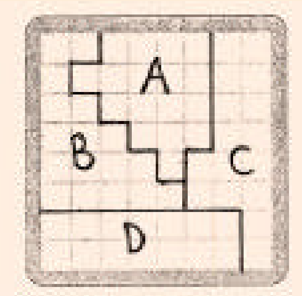
Diküçgendeki iki diküçgeni ve kareyi şekilde görüldüğü gibi iki kere çizelim. Buradan:

$ab = x\,(a+b)$ ve $x = ab/\,(a+b)$.

Arkadaş Sayısı

İnsana inanılmaz geliyor. Ama bu, gerçek! Diyebilirsiniz ki kimse kimseyi tanımıyor; o zaman en az iki sıfır vardır; yani eşitlik oluşmuştur. Deneyelim; herkesin farklı sayıda dostu olmasının olanaksızlığını görecek ve tümevarımla genelleyeceksiniz. *A, B, C* gibi 3 kişilik bir topluluk alalım ve her birine değişik arkadaş sayıları vermeye çalışalım. Örneğin, *A*'nın arkadaşı *B* olsun. *A*'nın arkadaşı var anlamına bunu *A*-1 diye yazalım. *B*'yi alalım. *B*, *A* ve *C* ile arkadaş olsun (yalnız *A* ile dostsa *A*-1 ve *B*-1 şeklinde eşitlik sağlanır); o halde B-2 dir. Şimdi *C*-3 yazmaya çalışalım; bu olanaksız; *C* en fazla 2 kişi ile, *A* ve *B* ile dost olabilir; o zaman durum *A*-2, *B*-2 ve *C*-2 olur; eşitlik fazlasıyla sağlanmıştır. *C*, *C*-2'de kalırsa *B*-2 ile, *C*-1 de kalırsa *A*-1 ile eşitleşir. *C*-0 olanaksız, neden? Örneğin *A, B, C, D* topluluğunda *A*-1, *B*-2, *C*-3 ve *D*-4 yazamıyorsunuz. *AB* ile *A*-1; *BA* ve *BC* ile *B*-2 olsun. Şimdi *C*-3 yazamıyoruz. Yalnız *CB* (ki zaten vardı) ve *CD* olası; bu ise *C*-2 demektir; *B*-2 ve *C*-2 ile eşitlik sağlanmıştır. *CD, CB, CA* ile *C*-3 yapabiliriz; ama o zaman *A*-2=*B*-2 olur. *A,B,C,D,E* gibi 5 kişi olsun; *AB* ile *A*-1; *BA* ve *BC* ile *B*-2; *CB, CD, CE* ile *C*-3 sağlanır. Şimdi *D*'ye *DA, DB, DC, DE* ile *D*-4 yaptırırsak *A*-1 ---> *A*-2 ve *B*-2---> *B*-3 olur. *B*-3=*C*-3 yaratılmıştır. *D*-4 olası değil. *D*3=C3, *D*2=*B*2 ve *D*1=*A*1 durumları da eşitlik sağlar. Görülüyor ki bir toplumda herkesin farklı sayıda dostu olması olanaksızdır.

Odaları Yerleştirelim



Dev Satranç Tahtası

n çift ise, karenin köşegenlerinden birinin uçlarında iki beyaz, diğerinin uçlarında iki siyah kare vardır ve siyah ve beyaz kare sayısı eşittir. Bu nedenle siyah veya beyazı seçmeniz aynı şey demektir. Karenin dört köşesi de beyazsa beyazı, dört köşesi de siyahsa siyahı seçmelisiniz; çünkü bu durumda *n* tek sayıdır ve 4 köşede de olan renkten $(n^2+1)/2$, diğerinden $(n^2-1)/2$ tane kare vardır; örneğin 7x7'lik bir karede köşeler siyahsa (49+1)/2=25 siyah ve (49-1)/2=24 beyaz kare vardır.

Uzay Vampirleri

Dört vampir düşünelim. Bunlar her yüzü bir eşkenar üçgen olan bir dörtyüzlünün köşelerinde bulunur; elbette ki eşkenar üçgenlerin kenarları 1'dir. Bu eşkenar dörtyüzyüzlünün 4 köşesinden geçen bir kürenin merkezini düşünelim; bu merkeze *0* ve eşkenar dörtyüzlünün köşelerine *A,B,C* ve *D* diyelim. *OA* =*OB*=*OC*=*OD*=*R* kürenin yarıçapıdır. Dörtyüzlünün tabanı *ABC* eşkenar üçgeni ve tepesi *D* olsun. *ABC*'nin merkezine *D*'den indirilen dik *O*'dan geçer. *ABC*'nin merkezine *E* diyelim. *EOB* bir diküçgendir. Önce *DE* uzunluğunu (eşkenar dörtyüzlünün yüksekliği) bulalım. *EB*=1/√3'dür (*EB*, kenarı 1 olan *ABC* eşkenar üçgeninde yüksekliğin 2/3'üdür. Pisagorla hesaplanırsa 1/√3 verir). $DE^2+EB^2=DB^2$.

$DE^2=1^2-(1/\sqrt{3})^2= 1-1/3 = 2/3$ ve $DE =\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

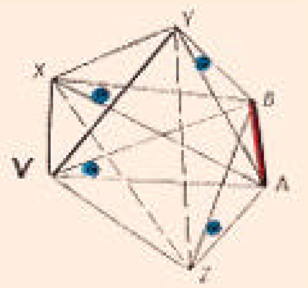
OEB diküçgeninde $OB^2=OE^2+EB^2$.

$DE= \sqrt{2}/\sqrt{3}$ olduğuna göre ve eşkenar dörtyüzlüde yükseklikler birbirini 3:1 oranında böldüğüne göre $OE=DE/4=\sqrt{2}/4\sqrt{3}$ olur. $R^2= OB^2=OE^2+EB^2=(\sqrt{2}/4\sqrt{3})^2+(1/\sqrt{3})^2=18/48$ ve

$$R=\sqrt{18/48}=\sqrt{3\cdot 6/3\cdot 16}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

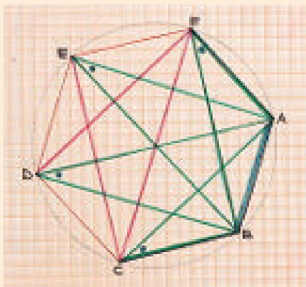
Bütün uzay vampirleri yarıçapı $R=\sqrt{6}/4= 0.6123$ m olan bir küre içine hapsedilebilir. Bu kürenin çapı 2*R*=1.2246 m'dir. Demek ki kürenin dışındaki herhangi bir vampir *A,B,C* veya *D* köşelerinin birinden 1m'den fazla uzaklaşmış olacaktır, oysa vampirler birbirlerinden en fazla 1 m uzaklaşabilirler denmişti. Demek ki vampirleri hapsedebildik. Vampir sayısı önemli değildir; çünkü her kürenin içinde sonsuz nokta vardır; yani her küre (bu arada bizim küremiz) içine sonsuz sayıda vampir alabilir (vampirleri nokta olarak kabul etmiştik).

Çokgen Biçimli Uzaylılar



Çokgen yaratığın en az *n*-2 beyni vardır. Kanıtlayalım: *n* köşeli çokgenin herhangi bir köşesini alarak diğer köşelere birleştirelim. *n*-2 üçgen oluşur. *n*-2 noktanın istenen koşullara uygun yerleştirilip yerleştirilemeyeceğine bakalım. Bunun için çokgenin herhangi bir kenarını, örneğin *AB*'yi alalım ve *AB*'yi taban olarak alan bütün üçgenleri düşünelim (böyle *n*-2 üçgen vardır; şekilde bunların tepesi *Y, X, V* ve *Z*'dir). Şimdi bu *AB* tabanlı üçgenlerden herbirinin *AB*'nin karşısındaki tepesine çok yakın olacak şekilde bir nokta koyalım. Bu noktaları öyle koyalım ki noktaların her biri çokgenin iki kenarı ile küçük köşegeni arasında kalan üçgenin (örneğin *YAB, ZAB, ZAV, XVZ, XVY, XYB* üçgeninin) içine düşsün. Şimdi de çokgenin herhangi üç köşesini, örneğin *X,Y* ve *Z*'yi alarak bir üçgen oluşturalım. Gerçekten de *XYZ* üçgeninin açılarından biri *AB*'yi gören bir AX_kB açısı içerecektir (X_k yerine *X,Y* veya *Z* geçebilir.). Bu örnekte *XYZ* üçgeninin *X* köşesindeki *AXB* açısı nokta içermektedir. Aslında *AB* dışında herhangi üç noktayla oluşturulacak her üçgen, *AB*'yi gören bir açı içermek zorundadır. *AB*'yi gören her üçgenin tepesine yakın nokta koyduğumuzdan, *AB* dışındaki herhangi 3 köşeyle oluşturulan her üçgen en az bir nokta içermek zorundadır. Demek ki *n*-2 noktayı söylediğimiz koşullarla çokgen içine dağıtırsak çokgen içindeki her köşegenler üçgeni (iki köşegen ve bir kenar veya iki kenar bir köşegen arasında oluşan her üçgen) bir nokta içerecektir. Aslında örneğin bir sekizgenin bütün köşegenlerini çizin ve her köşegenler üçgenine bir nokta düşecek şekilde noktalar koyun. Bunun için çokgenin herhangi bir kenarını gören bütün üçgenlerin tepesine yakın bir nokta koymanız yeter. Konuyu bir örnekle belirtelim. Elimizde bir yüzgen olsun. Her köşe 98 üçgen yaratabilir; 100 köşe olduğundan 98x100=9800 köşegenler üçgeni oluşur. Her üçgene 1 nokta düşmesi için 9800 nokta gerekmez; 100-2=98 nokta yeter. Yüzgenin kenarlarından herhangi birini gören 98 açı ve bunlara karşılık olan 98 üçgen vardır. Noktalarınızı bu 98 üçgenden herbirinin seçtiğiniz kenarın karşısındaki tepesine yakın olarak koyun; bu şekilde koyacağınız her nokta 100 üçgenin içine birden düşmüş olacaktır. Yüzgen yaratığın 9800 üçgen biçimi hücresi ve 98 beyni vardır; her beyin 100 hücreye akıl verir. Son bir örnek: Bir altıgenin içinde 6(6-2) = 6.4=24 köşegensel üçgen vardır.

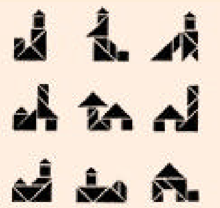
AB kenarını (kalın yeşil) taban alan 6-2=4 üçgenin kenarları yeşille çizilmiştir. Bu üçgenlerin *C,D,E,F* tepelerine yakın bir nokta konmuştur. Şimdi böylece varolan 24 üçgenin herbirinin içine bir nokta koymuş oldunuz. İrdeleyiniz. İşte matematiğin estetik yönü: 24 üçgen için 24 nokta değil, 4 nokta gerekli ve yeter.



Yanlış Terazi

1000 g'lık ağırlığı alın ve terazinin bir kefesine koyun. Terazinin öteki kefesine bu 1000 g ağırlığı dengede tutacak kadar gramlar koyun. Şimdi 1000 g'lık ağırlığı kefeden alın ve bu kefeye terazi yeniden dengeye gelecek kadar bulgur koyun. Bulgurunuz tam 1 kg'dır. 1000 g'lık ağırlığı dengede tutmak için 1000+*n* veya 1000-*n* gram kullandıysanız teraziniz n gram fazla veya n gram eksik tartıyor demektir. (1000 g'lık ağırlığı mal gibi tarttınız ve 1000 g'ın yanlış terazideki eşdeğerini buldunuz).

Tangram Evler



Dans ve Mantık

Kızların adlarının baş harflerini alıp yanına dans ettiği erkek sayısını yazalım ve Vera'dan sonraki kızlara rasgele harfler verelim. *R*(7), *Ş*(8), *V*(9), *W*(10), *X*(11), *Y*(12), *Z*(13), *İ*(14). Burada durmak zorundayız. Çünkü İrina bütün erkeklerle dans etti ve dans eden kızların sayısı 8'i buldu. 8+14=22 olduğundan aranan sayılar bulunmuştur: 8 kız ve 14 erkek.