Zekâ Oyunları

Selçuk Alsan

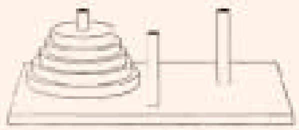
Saç Sayısı

İngiltere'de 50 milyon insan yaşıyor. Bir insanın başında en çok 1 milyon saç var. İngiltere'de kafasında aynı sayıda saç olan en az kaç kişi bulunuyor?

Köklü Sayıların Çizimle Bulunması

2'den sonsuza kadar olan sayıların köklerinin ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ...) çizimle bulunması için bir yöntem düşünün.

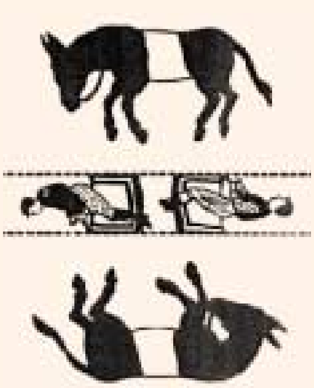
Hanoi Kulesi



Bu dünyaca ünlü problem 1883'de Fransız matematikçisi Lucas tarafından bulundu. Hanoi, Vietnam'ın başkentiydi; Vietnam ise o tarihte bir Fransız kolonisiydi. Lucas Fransa'da St. Louis Lisesi'nde matematik öğretiyordu. Lucas, buluşunu Li-Su-Stian Kolejinde öğretmen olan Claus adında birinin buluşu diye sundu.

Büyük Benares tapınağının kubbesi altında 3 elmas iğne dikilidir. Bunlardan birincisi üzerinde 64 altın disk vardır. Diskler en büyüğü en altta, en küçüğü en üstte olmak üzere konulmuştur. Bu Bramah Kulesidir. Rahipler, Yaratıcı'nın emrine uyarak altın diskleri bir iğneden ötekine naklederler. Kural şudur: bir disk, kendinden daha küçük bir disk üzerine konulamaz ve her keresinde yalnız bir disk nakledilebilir. Efsaneye göre 64 disk 1. iğneden bir diğer iğneye nakledilebildiğinde Kıyamet kopacaktır. Kıyamet ne zaman kopacak dersiniz?

İki Jokey



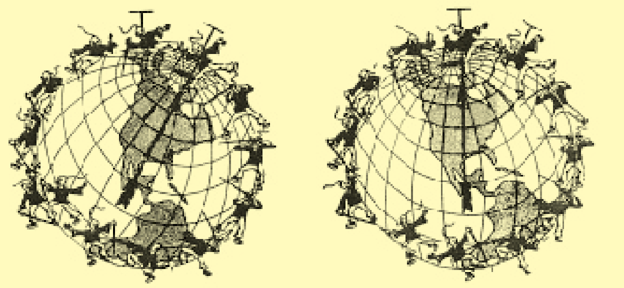
Bu resmi öyle 3 dikdörtgene ayırınız ki her merkebin üstünde 1 jokey olsun.

Ruhiye'nin Düğünü

Deli Ruhiye sonunda bir ruh doktoruyla evlenmeye karar verdi. Nikah günü sorulduğunda şöyle yanıt veriyordu: "Eylül ayında 2. Perşembe'den sonraki 2. Pazartesi". Düğün Eylül'ün kaçında yapıldı?

Dairenin Merkezi

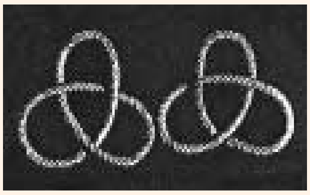
Yalnızca gönye kullanarak bir dairenin merkezini nasıl bulursunuz?



Esrarengiz Çinli

Soldaki resimde 13 Çinli var. Üstüste eş merkezli iki dairesel karton merkezlerinden tutturulmuş. Öyle ki iç daire dış daireye göre hafifçe rotasyon yapabiliyor. Sağda iç daire hafifçe çevrilmiş. Şimdi Çinli sayısı 12. İnanmazsanız sayabilirsiniz. Bir Çinli nereye gitti?

Yonca Biçimli Düğüm



Yonca biçimi bir düğüm elde edebilmek için uzun bir kağıt şerit alın. Şeridin uçlarından birini bir buçuk devir (yarım devir=180°) döndürün ve diğer ucu yapıştırın. Sonra tüm şeridi uzunlamasına ortadan kesin. Ortaya yonca biçimli bir düğüm çıkacaktır.

İğne ile π'nin Hesaplanması

Bu yöntemi 18. yüzyılda Fransız doğa bilimcisi Kont Buffon bulmuştur. Bir düzlem üzerine araları d birim olan paralel çizgiler çizilsin. Uzunluğu d'den kısa olan bir iğne, bu yüzeye rastgele düşürülsün.Eğer iğne bir çizginin üzerine düşerse buna "iyi atış", düşmezse "kötü atış" diyelim. Buffon gösterdi ki, iğnenin uzunluğu d ise, iyi atış olasılığı $2/\pi$ idi (2/3'den biraz küçük). Atış sayısı arttırıldıkça sonuç π'ye daha yaklaşıyordu. 1901'de İtalyan matematikçisi Lazzerini, 3408 atış yaparak π'nin değerini 3.1415929 olarak hesapladı; bu sayı, 6 ondalık basamağa kadar doğruydu.

Düşünen Adam

Resimdeki heykel ünlü bir heykeltraşın "Düşünen Adam" adlı yapıtı. Sanatçının adı nedir? Bu heykelde normal olmayan bir şey var, nedir?

Chanukalu Problemi

a) 8 gece süren Chanukalu Bayramını kutlamak için 1. gece 2 mum, 2. gece 3 mum, 3. gece 4 mum,..., 8. gece 9 mum yakılıyor. Böylece 8 gece sonunda 2+3+4+...+9= 44 mum yakılmış oluyor. Elde çeşitli renklerden mumlar var. Fakat belli bir gecede yanan mumların hepsi aynı renkten. Her renk tam 2 gece yanıyor. (İki ardışık gece olması şart değil) Bir örnekle belirtelim: 1. gece 2 mavi, 8. gece 9 mavi, 2.gece 3 kırmızı, 3.gece 4 kırmızı, 4. gece 5 yeşil, 6.gece 7 yeşil, 5.gece 6 sarı ve 7. gece 8 sarı mum yanıyor. Ama tabi ki mavi mumlar örneğin 1. ve 5. gece, kırmızı mumlar 6. ve 8. gece, yeşil mumlar 2. ve 4. gece ve sarı mumlar 3. ve 7. gece de yanabilir. Görüldüğü gibi, gereken renkli mum sayısı çok değişik olabiliyor. Örneğin ilk örnekte 2+9=11 mavi, 3+4=7 kırmızı, 5+7=12 yeşil ve 6+8=14 sarı mum gerekli. Toplam 11+7+12+14=44 mum. İkinci örnekte 2+6=8 mavi, 7+9= 16 kırmızı, 3+5=8 yeşil ve 4+8= 12 sarı mum gerekli. Toplam yine 8+16+8+12= 44 mum. Renklerin başharflerini alırsak 8 gecede renkler, M, M, K, K, Y, Y, S, S olacak. (Bu sıra rastgele permüte edilebilir) 4 renk ikişer ikişer alınarak (8!/2! 2! 2! 2!= 2520 tekrarlı permatüsyon yapar. Örneğin MKKSYSYM kadar KMMSYYSK sırası da olasıdır. Her yeni permütasyondu gereken 44 mumun dört renge dağılışı değişir; çünkü mum sayısı her gece 1 artmaktadır. Sorulan şudur: her olasılığı karşılamak için herbirinin renk dağılımı farklı, kaç türlü 44 mumluk kutu gereklidir?

b) Aynı soruyu genelleyelim: bayram 2N gece sürecek. Her n. gece (n+1) mum yakılacak.

2'nin Kuvvetleri

758 sayısını 2'nin kuvvetlerinin toplamı olarak ($2^0,2^1,2^2,2^3$,...) yazınız.

Geçen Ayın Çözümleri

Yer Değiştirme

Her öğrenci en fazla 27 farklı öğrenciyle yanyana oturabileceğinden bu yer değiştirme 27 aydan fazla süremez. Bu 27 ayda öğretmenin öğrencileri nasıl oturttuğuna bir bakalım.

Öğrencilere 1'den 28'e numara vererek onları düzgün bir yirmiyedigenin köşelerine oturtalım (sol şekil) 28 Nolu öğrenci merkezde olsun. 1-28 doğrusuna göre simetrik olan numaraları birleştirelim: 27-2, 26-3, 25-4, ... On üç paralel doğru ve 1-28 çizgisi 14 sıraya karşılıktır. Her sırada iki öğrencisinin numaraları toplamı 29'dur: 27+2= 26+3= 25+4=... 29, 27'ye bölünürse 2 artar. 1 ancak 28 ile oturursa 29 yapar ve bu , 27 ile bölünürse 2 artar. 1'in durumu özeldir. Bir sonraki ay öğrenciler sağ şekildeki gibi otururlar. Toplam 31'dir ve 27 ile bölününce 4 artar. Devam edelim: 28-3, 28-4, 28-5, ..., 28-27 dairelerini çizelim ve aynı yöntemle eşleri bulalım, n kişilik bir sınıfta, n çiftse, ikili sıralara n-1 farklı şekilde oturulabilir. Her ay her sırada iki öğrencinin numaralarının toplamı n-1 ile bölündüğünde r gibi bir değişmez vermelidir. r, 28-1 için 2, 28-2 için 4, 28-3 için 6 vb. dir. Her ay bir x nolu öğrenci tek kalır ve 28 nolu öğrenciyle oturur. r çiftse x=r/2 ve r tekse x= (r+n-1)/2'dir. Örneğin 28-1'de r=2 ve x=1; 28-2'de n=4 ve x=2 vb.

Sherlock Holmes ve Kasa

a_1, a_2, ..., a_n 1'den büyük pozitif sayılar olsun. Bu sayıların p. dereceden ortalama üssü, 1. dereceden ortalama üslerinden (ki aritmetik ortalamadır) daha büyüktür:

$c_p = (a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p)^{1/p}$ ≥

$a_1+a_2+...+a_n/n=c_1$.

Buradan kolayca şu elde edilir (iki tarafın p. kuvvetini alarak):

$(a_1+a_2+...+a_n)^p \leq n^{p-1}$

$(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p)$

Bu formüle göre:

$(x+y+z)^3 \leq 3^2$

$(x^3+y^3+z^3)=9.81=729.$

O halde x+y+z $\leq \sqrt[3]{729}$= 9.

İş adamı sarhoş bir serseriyle anlaşmıştı. Plan şuydu: İş adamı bir gün evinde boya yapan bu serseri yanındayken kasasını açacak ve adam şifreyi öğrenmiş olup kasayı soyacaktı. Aslında şifreyi serseriye iş adamı vermiş, "şifre 9" demişti. Serseri bu şifreyle kasayı açıp 50 milyon sterling'i çalmış ve yarısını iş adamına verip yarısını kendi almıştı. İş adamı çalınmış gösterdiği parasını ayrıca sigortadan alacaktı. Evsiz barksız serseri 25 milyon sterling uğruna bir süre hapis yatmaya razıydı. Ne var ki sarhoş kafasıyla şifreyi 9 yerine 19 diye hatırlamış ve kendini ele vermişti. Çünkü yukarıda kanıtladığımız gibi (ki Holmes de aynı işlemleri yapmıştı) $x^3+y^3+z^3=81$ iken x+y+z, 9 dan büyük olamaz.

Mısır Piramidinin Esrarı

Bilindiği gibi 1+2+3+...+n=n (n+1)/2 dir (aritmetik dizi). Bizim üçgenimizin (n-1). sırasının son (en sağ) sayısı (n-1)n/2, n. sırasının son sayısı n (n+1)/2 dir. O halde ilk (n-1) sıranın toplamı:

S_1= 1+2+...+ n (n-1)/2= 1/2 n (n-1)/2 [n (n-1)/2 + 1] dir.

İlk n sıranın toplamı:

S_2= 1+2+...+n (n+1)/2= 1/2. n (n+1)/2 [n (n+1)/2 + 1] dir.

n. sıradaki sayıların toplamı S_2-S_1= n $(n^2+1)/2$ dir. 100. sırada 100 $(100^2+1)/2$= 500050 taş vardır. Tutankomen 500050 yıl sonra dirilip Mısır'a dönecektir.

İki Yerine Üç Ceset

Câniler dikkati çekmemek için çocuğun tabutunu babasının tabutu içine koymuşlardı. Böylece aslında uşak doğruyu söylüyordu: tabutlardan biri içinde bir (çocuk), diğeri içinde iki (baba ve çocuk) vardı.

Pascal Üçgeni, Fibonacci Dizisi ve Binom Katsayıları

Pascal üçgeni şöyle elde edilir: Her terim kuzeydoğu ve kuzeybatısındaki terimlerin toplamıdır; örneğin 3= 1+2, 4=1+3, 6=3+3 vb. Pascal üçgeninin yatay sıraları, binom (ikiterimli) parantezlerin n. kuvvetinin açılımlarındaki katsayılardır:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1a+1b$

$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$

$(a+b)^3= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

Binom katsayıları şöyle de bulunur: Her katsayı a'nın üssüyle çarpılıp terim sırasına bölünerek bir sonraki terimin katsayısı elde edilir: $(a+b)^3=1.a^3+(1.3)/1\, a^2b+(3.2)/2ab^2+3.1/3b^3$. (yani $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; a'nın üsleri 3,2,1,0 ve b'nin üsleri 0,1,2,3 olarak gider). Binom katsayılarının toplamı 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,... diye gider: $1=2^0$, $1+1= 2^1$, $1+2+1=2^2$, $1+3+3+1= 2^3$ vb. Pascal üçgenindeki sayıları çapraz olarak alırsak Fibonacci serisi elde edilir: 1,1,2,3,5,8, ... Her terim kendisinden önceki iki terimin toplamıdır.

Fibonacci'nin Şaşırtıcı Karesi

Fibonacci serinin bir özelliği şudur: $(F_n.F_{n+3})-(F_{n+1}.F_{n+2})=(-1)^n$. Burada n=3 alınmış. (3.13) - (5.8)= $(-1)^3$= -1. Üst şekilde E+F+G'den oluşan dikdörtgenin alanı 3x (8+5)= 3.13= 39. Alt şekilde E, F ve G'den oluşan dikdörtgenin alanı 8 x (3+2)= 8 x 5= 40. Küçük beyaz pencere 39-40= -1 sonucu oluşan, kenarı 1 olan boş bir karedir.

İlginç Eğriler

Bu Amerikalı matematikçi M.R.E. Moritz tarafından bulunmuş 38. dereceden bir süs eğrisidir.

Polar denklemi:p= cos 9/10 θ

Kartezyen denklemi:

$R^9 (512R^5-1280R^4+1120R^3-40R^2+50R -1)^2 -X^2= 0$

$R= x^2+y^2$

$X= x^9-36x^7y^2+126x^5y^4-84x^3y^6+9xy^8$.

Hangi Sayı Gelmeli

a) 41. Bir üst sıradaki 9 ve 25 ile iki üst sıradaki 7 toplanacak; 9+25+7= 41.

b) 2520. Bu dizi ilk 9 doğal sayının (1,2,3,4,5,6,7,8,9) en küçük ortak katlarını veriyor.

c) 57. n-1 doğrunun bir dairede kaç bölge ayırdığı.

d) 31131211131221. Sayıları okuyorsunuz: 1= bir tane bir; bu nedenle bir sonraki terim 11; 11'de iki tane 1 var; o halde 21; 21'de bir tane 2, bir tane 1 var; o halde 1211, ...

e)011010011001011010010110 01101001 Kendinden önceki sayıdaki 0'lar yerine 01 ve 1'ler yerine 10 koyuyorsunuz.

Zarif Eşitsizlikler

1) $1= (x_1+x_2+x_3)^2= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1= 1/2\,(x_1-x_2)^2 + 1/2\,(x_2-x_3)^2 + 1/2\,(x_3-x_1)^2 + 3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1 \geq 3\,(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

Eşitlik hali $x_1=x_2=x_3$=1/3'tür.

2) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1= (x_1+x_3)\,(x_2+x_4) \leq (x_1+x_3+x_2+x_4/2)^2= 1/4$.

Eşitlik hali $x_1=x_2=x_3=x_4$= 1/4

Bavula Sığmayan Olta

Ruhi 3x3x3m boyutlarında bir karton kutu satın aldı. Boyutları 3m. yi aşmayan bu kutu bagaja kondu. Bu küpün iç büyük köşegeni 3√3= 5.19 m. dir. 4 m.lik olta rahatlıkla büyük köşegene sığmıştır.

Kaç Tane Diküçgen

Örneğin bir kenarı 60 olan kaç tane primitif Pisagor üçgeni vardır? 60'ı asal çarpanlarına ayıralım: $60=2^3.3.5$. 60'ın üç asal çarpanı var, o halde 60 sayısı 2^{3-1}=4 primitif Pisagor diküçgeninin kenarı olabilir. Örneğin $5040= 2^4.3^2.5.7$ sayısının 4 asal çarpanı vardır, 5040 sayısı 2^{4-1}=8 primitif Pisagor diküçgeninin kenarı olabilir. Genellikle bir sayı n asal çarpana veya onların üslü şekillerine ayrılıyorsa 2^{n-1} primitif Pisagor üçgeninin kenarı olabilir. Bu kuralın iki istisnası vardır: 1) Sayı çiftse ve 4 ile bölünmüyorsa çözüm yoktur; örneğin 30 hiçbir primitif Pisagor üçgeninin kenarı olamaz.

2) 4x+2 şeklindeki sayılar primitif üzgenine kenar olamaz, örneğin 6,10,14, 18 vb.

b) Burada şu formül kullanılır:

$L=(2a_0-1)(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_n+1)-1\ /\ 2$

Bu formülde a_0,a_1,a_2... bir sayının asal çarpanlarının üsleridir. 2 hariç, bütün sayıların üsleri 2 ile çarpılıp 1 eklenir, 2 nin üssü 2 ile çarpılıp 1 çıkarılır; sonra hepsi birbiriyle çarpılıp 1 çıkarılır ve sonuç 2'ye bölünür. Örneğin $60=2^2.3.5$. 2nin üssü 2, 3'ün 1 ve 5'in 1. O halde L= (2.2-1)(2.1+1)(2.1+1)-1/2= 13.

Demek ki bir kenarı 60 olan 13 Pisagor üçgeni vardır. a şıkkında bunlardan dördünün primitif Pisagor üçgeni olduğunu gösterdik. 30= 2.3.5 için L= (2.1-1) (2.1+1) (2.1+1)-1/2= 4 ve $45= 3^2.5$ için L=7.

Evin Numarası

$ab=10a+b= (a+b) + (a-b)^2$ ve buradan $(a-b)^2$= 9a. a=1 ve b=4 ya da a=9 ve b=0. Aranan sayı 14 ya da 90.

Şeytanın Küpü

Kenarlara sayılan yazılar 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12 ve 13'tü. Köşedeki toplam 21 ve yüzdeki toplam 28'di. Köşe toplamına K, yüz toplamına Y, yazılan 12 sayının toplamına S diyelim. 8K= 2S'dir; çünkü köşe toplamları alınırken her kenar 2 kere sayılmıştır. Benzer olarak 6F=2S'dir. Buradan 4K=S=3Y'dir. O halde S, 12 ile bölünmelidir. 1+2+...+12=78'dir; 78, 12 ile bölünmez; bu nedenle 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12 ve 13 alınmıştır; bunların toplamı 84'tür. bu 12 sayıyı kenarlara siz yerleştirin bakalım.

Paralelkenar

n çizgiden 2 çizgi C^n_2 şekilde ve m çizgiden 2 çizgi C^m_2 şekilde seçilebilir. O halde aranan yanıt

$C^n_2 . C^m_2 = n (n-1) m (m-1)/4$

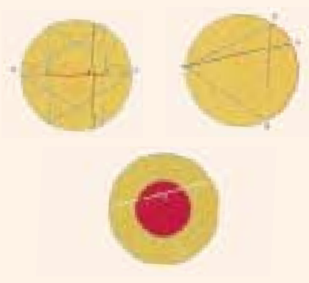
Örneğin n=5 ve m=9 ise (5.4.9.8)/4= 360 paralelkenar oluşur.

Dört Nokta

A'dan ve C'den geçen birbirine paralel L ve L' gibi iki doğru çizip bunlara B ve D'den iki dik çizelim. Bir dikdörtgen elde ettik. AC nin orta noktasına L ve BD'ninkine K diyelim. M dikdörtgenin merkeziyse, bellidir ki LMK açısı= 90° dir. Dikdörtgenin L kenarını A noktası etrafında döndürelim. M'lerin geometrik yeri çapı KL olan bir dairedir. A, B, C, ve D iki çifte üç şekilde ayrılabilir: AC-BD; AB-CD ve AD-BC. Çözüm bunlara karşılık olan 3 dairedir.

Borel Paradoksu

1) Kiriş x noktasında CD çapına dik olsun, problem, X'in E ve F arasında bulunmasıyla çözülür. Bu olasılık EF/CD=1/2'dir.



2) Problem, X noktası BC küçük yayı üzerindeyken çözülür. BC yayı/daire çevresi= 1/3 tür.

3) Kirişin orta noktası olan X, çapı sarı dairenin çapının yarısı kadar olan kırmızı daire içinde bulunursa problem çözülür. Kırmızı ve sarı daire çaplarının oranı 1/4 tür.

Nasıl oluyor da aynı soru, 3 farklı (ve üçü de doğru) yanıt verdi? Bir hata mı yaptık? Asla, her şey olasılığı nasıl tanımladığımıza bağlı. Olasılıkta tanımlamalar keyfidir ve bu keyfi tanımlamalardan mantıklı sonuçlar çıkabilir. Yine de düşündürücü ama...

Şah ve At

Bir hamlede gider. Bu problem size bir kez daha çok önemli bir kuralı (ki hayatta da geçerlidir) hatırlatıyor: karar vermeden önce bütün olasılıkları düşünün. Bazılarınız 4 sıçramayı duyunca atların birbirlerinden hayli uzak olacağını düşündü belki. Ama b2, c4, a3, c2 ve a1 ile b2'deki at 4 sıçrayışta a1"e gelebiliyor. Şah b2'den a1'e 1 hamlede gelebilir.

Keşiş Suçlu mu?

1. hırsızlık: Fıçıda 99 lt. şarap kaldı. İkinci hırsızlık: Fıçıda $99^2/100$ lt. şarap kaldı. 3. hırsızlık: Fıçıda $99^3/100^2$ lt. şarap kaldı. 4. hırsızlık: Fıçıda $99^4/100^3$ lt. şarap kaldı... 30. hırsızlık: Fıçıda $99^{30}/100^{29}$ lt. şarap kaldı. $99^{30}/100^{29}$= 73.97 lt. Keşiş 100-73.97 lt. şarap çalmıştır. Yargılanması gerekir. ($99^{30}/100^{29}$ logaritmayla kolayca hesaplanır).

Torbadaki Yılanlar

Üç olasılık var:

1) Torbada kalan: Torbada başlangıçta varolan zehirsiz yılan
Kaçan: Torbaya sonradan konulan zehirsiz yılan
2) Torbada kalan: Torbaya sonrada konulan zehirsiz yılan
Kaçan: Torbada başlangıçta varolan zehirsiz yılan
3) Torbada kalan: Torbada başlangıçta varolan zehirli yılan
Kaçan: Torbaya sonradan konulan zehirsiz yılan.
Torbada kalan yılanın zehirli olması olasılığı 1/3'tür.

Hipotenüs'ün Esrarı

Yalnız K (m^2+n^2) şeklinde yazılabilen sayılar hipotenüs olabilir. Yani bir sayı ancak iki karenin toplamı ya da böyle bir toplamın tam katıysa hipotenüs olabilir. En az bir asal çarpanı 4x+1 şeklinde yazılabilen bütün sayılar- örneğin 5,10,13, 15 vb. hipotenüs yapılabilir. Ancak bir sayının primitif bir Pisagor üçgeninin hipotenüsü olabilmesi için K=1 ve m ve n kendi aralarında asal olmalı, m ve n'den biri tek, biri çift seçilmelidir. Primitif Pisagor üçgenlerinin hipotenüsü'ü olabilen doğal sayılar için şu şart gereklidir: Asal çarpanlarından herbiri 4x+1 şeklinde olmalıdır, 5,13,65,85 gibi. 4x-1 şeklinde (örneğin 3,7,11,19 vb) asal çarpan içeren hiçbir sayı primitif Pisagor üçgenlerine hipotenüs olamaz. Herbiri 4x+1 şeklinde n asal çarpan içeren her N sayısı, 2^{n-1} primitif Pisagor üçgenine hipotenüs olabilir. Örneğin 65=5.13 .2^{2-1}= 2, 1105= 5.13.17 ise 2^{3-1}=4 Pisagor üçgenin hipotenüsü olabilir. 15, 21, 39 ve bütün diğer 3k tipindeki sayılar, kısacası 3'ün tam katı olan sayılar, Pisagor üçgenine hipotenüs olamaz; 7'nin, 11'in, 19'un vb. tam katları da böyledir (4x-1 oldukları için).

Bir doğal sayı hem (4x-1) ve hem de (4x+1) şeklinde asal çarpanlar içeriyorsa tek bir primitif Pisagor üçgenine bile hipotenüs olamaz, fakat H sayıda nonprimitif Pisagor üçgenine hipotenüs olabilir. H şöyle bulunur: (4x-1) şeklindeki asal çarpanlar dikkate alınmaz. (4x+1) şeklindeki asal çarpanların üsleri b_1, b_2,..., b_r olsun. H= $(2b_1+1)(2b_2+1)...(2b_r+1)$ -1/2. Örneğin N= 2^5. 3. 5. $7^5.11^3.13^2$ olsun. 2,3,7 ve 11 asal çarpanlarını ataraz. Geriye 5 ve 13^2 kalır:

H= (2.1+1) (2.2+1) - 1/2= 7

Bu N sayısı kaç Pisagor üçgenine kenar olabilir?

(2.5-1) (2.1+1) (2.1+1) (2.5+1) (2.3+1) (2.2+1) -1 /2= 15592.

Bu N sayısı 15592+7= 15559 Pisagor üçgenine kenar veya hipotenüs olabilir.

N hiçbir primitif Pisagor üçgenine hipotenüs olamaz, çünkü (4x-1) şeklinde çarpanlar içermektedir.

Diküçgen ve Kare

Fermat böyle bir diküçgen olamayacağını kanıtladı. Dikkenarların biri $X=m^2-n^2$ ve diğeri Y= 2 mn iken diküçgenin alanı $S=mn(m^2-n^2)$ dir. mn (m^2-n^2)= K^2 nin olanaksız olduğu Fermat'ın sonsuz iniş yöntemiyle kanıtlanabilir.

Eşit Alanlı Diküçgenler

Bir aritmetik serinin 4 ardışık terimi, a,b,c ve d olsun. Pisagor üzgeninin kenarları, m ve n doğal sayı olmak üzere $X=m^2-n^2$, Y=2 mn ve $Z= m^2+n^2$ dir. Üç üçgen için şu sayılar alınır: m_1=cd, n_1=ab, m_2=c(c+b), n_2= a(c-b), m_3= b(c+b), n_3= d(c-b) a=1, b=2, c=3, d=4 alırsak m_1=12, n_1=2, m_2= 15, n_2= 1; m_3=10, n_3=4 bulunur. Aranan üçgenlerin kenarları [140, 48], [224, 30] ve [84, 80] dir; her üçgenin alanı 3360 dır. (1. kenar=m^2-n^2, 2. kenar= mn ile bulundu. Hipotenüsler sırasıyla 148, 226 ve 116 dır. Hipotenüs=m^2+n^2;örneğin $\sqrt{140^2+48^2}=148$ vb.)

Bu Formül Neye Yarıyor?

Bu formül ancak ve ancak p asal ise doğrudur. Buna Wilson teoremi denir. Örneğin 12!= 479001600 dür. 479001601/13 bölünmesi kalansız olduğundan 13 asaldır (bölüm 36846277'dir).

Bu formülün bir uygulaması da şudur: eğer p asal sayısı, 4x+1 şeklindeyse $[(1.2.3...2x)^2+1]$ sayısı p'nin tam katıdır. Örneğin x=3 iken p=4.3+1=13 olur. Bu durumda $(1.2.3.4.5.6)^2$ +1 =518401 sayısı asal 13 sayısı ile kalansız bölünür. Bunu şöyle de ifade edebiliriz: $[(2x)!]^2 \cong -1$ mod p.

Bir Buluşma

İkisi arasındaki uzaklık saatte 5 km hızla azalıyor. Bu ise dakikada 1/12 ve 2 dakikada 1/6 km dektir. 166m'yi koşarak birbirlerine kavuşabilirlerdi.

Pisagor Üçlüleri

Fibonacci sayılarını hatırlayalım; her sayı kendinden önceki iki sayının toplamıdır:
0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,... (F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, ... olarak yazılır). Sabit pozitif bir k tamsayısı alalım. N=$F_{2k}.F_{2k+1}$ olsun. Bu durumda n (n+1)/2 ve n^2 diküçgenin tam sayı kenarlarıysa tam sayı hipotenüs $\sqrt{n^2(5n^2+2n+1)/4}= F_{2k} F_{2k+1} F_{4k+1}/2$ olur. Fibonacci serisinden biliyoruz ki $F_m=(\alpha^m-\beta^m)/\sqrt{5}$. Burada $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta=(1-\sqrt{5})/2$ dir.
Bu formüller $\alpha+\beta=1$ ve $\alpha\beta=-1$ ile birleştirilirse şu bulunur:

$5n^2+2n+1= (F_{4k+1})^2$.

Şimdi bir uygulama yapalım. k=2 alalım. Bu durumda F_{2k}= F_4=3 ve F_{2k+1}=F_5= 5 olur. n= $F_{2k}.F_{2k+1}$= 3.5=15 bulunur. Buradan n (n+1)/2= 15.16/2=120 ve $n^2=15^2$=225 bulunur. Buradan $120^2+225^2=255^2$. 120, 15. üçgen sayı ve 225, 15'in karesi.

Dikkenarları 120 ve 225, hipotenüsü 255 olarak bulduk. Hipotenüs'ü şöyle de bulabilirdik:
hipotenüs= $\sqrt{n^2(5n^2+2n+1)/4}$= $\sqrt{15^2(15^2.5+2.15+1)/4}$= 255.
Hipotenüs= $F_{2k}.F_{2k+1}.F_{4k+1}/2$= 3.5.34/2=255.

(F_{2k}=3, F_{2k+1}=5 ve $F_{4k+1}=F_9$=34 Fibonacci sayıları. k=2 almıştık. 4., 5. ve 9. Fibonacci sayıları 3,5 ve 34'tür). Bir başka örnek: k= 3 alalım. 2k= 2.3=6 ve 2k+1=6+1=7. F_6=8 ve F_7=13. n=F_{2k}. F_{2k+1}=8.13= 104. O halde n=104. n. üçgen sayı= n(n+1)/2=104.105/2=5460. Kare sayı = $n^2= 104^2$=10816. $5460^2+10816^2=12116^2$.

Hipotenüs= $(F_{2k}.F_{2k+1}.F_{4k+1})/2=F_6.F_7.F_{13}/2$=8. 13.233/2= 12116.

Formüle göre $5n^2+2n+1= (F_{4k+1})^2= 233^2$=54289.

$n^2=104^2$=10816. Hipotenüs= $\sqrt{n^2(5n^2+2n+1)/4}$= $\sqrt{10816.54289/4}$= 12116.

Özet: k gibi bir tam sayı alın. Fibonacci serisinden F_{2k}, F_{2k+1} ve F_{4k+1}'i bulun. n= $F_{2k}.F_{2k+1}$ alın. Buradan üçgen sayı n(n+1)/2 ve kare sayı n^2 bulunur. Bu iki sayı Pisagor üçlülerinin ikisidir. Hipotenüs şu formüllerle de bulunur: Hipotenüs= $\sqrt{n^2(5n^2+2n+1)/4}$= $F_{2k}.F_{2k+1}.F_{4k+1}/2$. $5n^2+2n+1= (F_{4k+1})^2$ dir. Böylece biri üçgen, biri kare sayı olmak üzere Pisagor üçlüleri bulabilirsiniz. (3,4,5), (120, 225, 255), (5460, 10816, 12116) gibi.