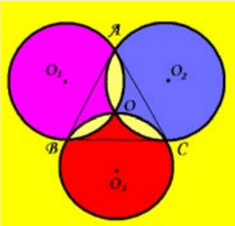
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Dördüz Çemberler



Günümüzde insanlarda, lise seviyesi geometrisinde ulaşılabilecek tüm teoremlerin bulunduğuna dair anlamsız bir ümitsizlik söz konusu. Oysa ki soracağımız teorem, tüm sadeliğine karşın Amerikalı matematikçi Roger Johnson tarafından ancak 1916 yılında bulunabildi. Teorem şöyle: Yarıçapları r olan ve şekildeki gibi kesişen 3 çemberimiz olsun. Çemberlerin kesişme noktaları A, B, C noktaları ise bu noktaların oluşturduğu üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı da r olur ve diğer çemberlerle eştir. Acaba bunu kanıtlayabilir misiniz?

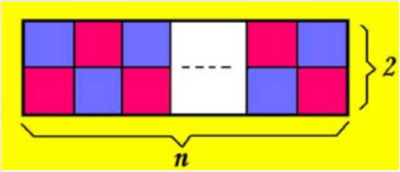
Nokta Eşleştirme

Bir düzlem üzerinde 2n tane nokta seçelim. Ancak bu noktalar düzleme öyle dağılsın ki noktalardan herhangi 3 tanesi aynı doğru üzerinde bulunamasın. Şimdi rasgele bu noktalardan n tanesini kırmızıya n tanesini maviye boyayalım. Son olarak da birebir eşleşecek şekilde her kırmızı noktadan bir mavi noktaya doğru parçası çizelim. Kanıtlayınız ki her zaman, eşit sayıdaki kırmızı ve mavi noktalar için hiçbir doğru parçası birbiriyle kesişmeyecek biçimde bir eşleştirme yapmak mümkündür.

Ünlü Euler Fonksiyonu

İlk defa Euler'in ilginç özelliği nedeniyle dikkat çektiği ünlü $f(x) = x^2 + x + 41$ fonksiyonunu ele alalım. Kanıtlayınız ki bu fonksiyon $f(40) = f(-41) = 41^2$ değerleri haricinde hiçbir zaman sonuç olarak bir sayının karesini vermez.

Domino Tahtası



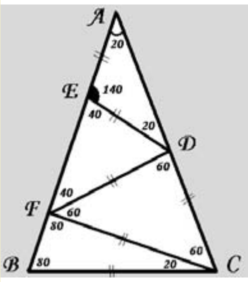
Şekildeki gibi n x 2'lik bir tahtamız olsun ve elimizdeki 2 x 1'lik domino taşlarını tüm tahtayı dolduracak ve üst üste çakışmayacak şekilde bu tahtaya dizmek isteyelim. Acaba kaç farklı şekilde dizebiliriz? n sayısına bağlı olarak elde ettiğimiz sonuçtan bir dizi oluşturursak bu dizinin özelliği ne olur?

Cevahir Çığla / Ankara

(Bu soruyu Matematik Kulesi'ne gönderen okuyucumuzun adresine TÜBİTAK Yayınları'nın "Bir Matematikçinin Savunması (G. H. Hardy)" adlı kitabı postalanmıştır.)

Geçen Ayın Çözümleri

Açı Avlama



Çözümün aslında en can alıcı noktası, BC ile 20 derecelik açı yapacak bir CF doğru parçasının çizilmesi. Çözümün geri kalanı zaten çorap söküğü gibi geliyor. Yapılan çizim sonucunda şekildeki gibi BCF ikizkenar üçgenini elde ederiz. FC = CD ve FCD açısı 60 derece olduğu için FCD üçgeni eşkenar üçgen olur. Açı-kenar ilişkilerini kullanarak FDE ve AEC üçgenlerinin ikizkenar oluğunu ve nihayet aradığımız açının 140 derece olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz.

Giz(em)li Asallar

N sayısı, içinde k tane 1 bulunduran sorudaki sayılardan olsun. Örneğin k=4 ise N=1010101 olur. Gelin 2k basamaklı, 11.N sayısını inceleyelim. 11.1010101 = 11111111 = $1111.(10^4+1)$. Bu eşitliği genelleştirmek de mümkün: $11.N = M.(10^k+1)$. Buradaki M sayısı, k basamaklı ve tüm basamaklarında 1 bulunan bir sayıdır. Dikkat ederseniz k'yi çift bir sayı aldığımız zaman M sayısı 11 ile bölünen bir sayı oluyor. Peki k tek sayı ise ne olacak? O zaman da (10^k+1) sayısı 11 ile bölünecek. Mesela k=5 iken $10^5 + 1$ = 111111 - 10.1111 olur ve görüldüğü gibi 11 ile bölünür. Sonuç olarak k tek veya çift iken $11.N = M.(10^k+1)$ eşitliğinde 11 ya M'yi ya da (10^k+1)'yi böler. Geri kalan parça da N'yi bölmek zorundadır. Bu yüzden asal olabilecek tek sayımız k=2 iken 101'dir. Diğerleri asal olamaz.

İrrasyonel Belirsizlik

Örneğin $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayısının rasyonel olup olmadığına bakalım. Büyük bir olasılıkla rasyonel değil gibi ancak kanıtlaması çok da kolay gözükmüyor. Çok şanslıyız ki, bu durum soruyu çözmemizi engelleyemeyecek. Eğer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rasyonel ise soruyu çözmüşüz demektir($a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$). Yok değil ise o zaman $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ve $b = \sqrt{2}$ değerlerini alırız. Böylece $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$ olur. Sonuç olarak bir şeklide a ve b irrasyonel iken a^b sayısının rasyonel olabileceğini göstermiş olduk.

En Büyük Çarpım

Sayının toplamlarının içinde 1 bulunabilir mi? Bu akıllıca değil çünkü o 1'i alıp başka bir sayıya eklersek çarpımı kesinlikle arttırmış oluruz. Peki toplamların içinde 4 veya 4'ten büyük bir sayı bulunabilir mi? Farz edelim ki bulunsun ve bu sayıya p diyelim. Bu sayı yerine toplamda (p-2)+2 değerini koyalım. $p \geq 4$ için $(2p-4) \geq p$ diyebiliriz. O halde ilk sonucumuz ulaştık: en büyük çarpım değerine ulaşmak için sadece 2 veya 3 sayılarını kullanabiliriz. Sizce 2 sayısı toplamda 2'den fazla bulunabilir mi? Öyle bir durumda 2+2+2 yerine 3+3 yazarak çarpım arttırılabilir. Artık sonucu açıklayabiliriz: En büyük çarpım değeri için sayıyı, hiç 2 kullanmadan 3'lükler halinde toplamlarına ayırmaya çalışırız, bu mümkün değilse 1 tane ya da en kötü ihtimalle 2 tane 2 kullanıp geri kalanı 3'lükler halinde toplamlarına ayırırız.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

"Eğer herkes kadar yaşayabilseydi, bugün dünya çok daha farklı olurdu." 32 yıl gibi kısa bir hayata sığan 600'den fazla teoremi göz önüne alındığında, birçok matematikçinin ortak düşüncesini yansıtan bu cümlenin kesinlikle abartılı olmadığı kolaylıkla anlaşılır. Kısacık hayatını matematiğe adayan bu dehanın 117. doğum gününü geçtiğimiz günlerde kutlamamız sebebiyle, bu ay kendisini köşemizde konuk ediyoruz.

Hindistan'ın küçük bir kasabası olan Erode'de 22 Aralık 1887 tarihinde doğdu Srinivasa Aiyangar Ramanujan. Fakir bir ailenin üyesi olmasından dolayı öğrenim hayatı boyunca birçok zorlukla karşı karşıya kaldı. Gerçi matematikteki yetenekleri Hindistan'ın önemli okullarından Kumbakonam Koleji'ne burslu olarak girmesine yetmişti. Ancak matematiğe o kadar yoğunlaşmıştı ki okuldaki diğer derslere hiç önem vermiyordu. Üstüne bir de ingilizcesinin yeterli olmaması eklenince çok ihtiyaç duyduğu öğrenim bursu kesildi. Bunun üzerine zor durumda kalan Ramanujan okulu bırakarak bir muhasebe işinde çalışmaya başladı. Yine de matematik çalışmalarına hiç ara vermiyor, tüm gece hiç uyumadan yaptığı çalışmalarını defterine kaydediyordu. Defterindeki kayıtlardan bir kısmını İngiltere'nin ünlü matematikçilerinden E.W.Hobson, H.F.Baker and G.H.Hardy'ye mektupla gönderdi. Ancak mektubuna sadece Hardy cevap verdi. "Yazdıklarına bir kere bakmam bile birinci sınıf bir matematikçi tarafından yazıldığını anlamama yetti" diyor İngiliz matematikçi. Oysa bahsettiği kişi üniversite okumamış ve sadece temel matematik eğitimi almış Ramanujan'dan başka birisi değildi! Gönderdiği mektupta aşağıdaki eşitlik gibi 120'den fazla teorem bulunuyordu:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{0}^{\cdot} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

Mektuptan çok etkilen Hardy hemen bir burs ayarlayarak Ramanujan'ın Cambridge Üniversitesi'ne gelmesini sağladı. İkisi birlikte sayılar teorisi, sonsuz seriler, eliptik fonksiyonlar gibi birçok konuda başarılı çalışmalar yaptılar. Ancak Hindu yaşam geleneklerine sıkı sıkıya bağlı olan Ramanujan buradaki yaşam tarzına bir türlü alışamadı. Sadece kendi yaptığı vejeteryan yemekleri yeme alışkanlığı, Dünya Savaşı yıllarında aradığı sebzeleri bulamaması nedeniyle kendisini sıkıntıya sokuyordu. Artık iyice güçsüzleşmişti ve devamlı hastalanıyordu. Hindistan'a dönmezse iyileşemeyeceğini anlayarak 5 yıl sonra İngiltere defterini kapattı ancak yine de Hindistan'daki daha ilk yılında 26 Nisan 1920'de öldü.

Ramanujan'ın matematik dünyasına armağan ettiği, her biri ayrı bir sanat eseri olan formülleri sayesinde astrofizikten moleküler biyolojiye birçok alanda önemli gelişmeler sağlandı. Sonuç olarak diyebiliriz ki dehanın 32 yıllık ömrü bile dünyanın daha farklı olmasına yetti. Bu dehayı matematik dünyası biraz buruk bir şekilde de olsa sonsuza kadar hatırlayacaktır.