Goldbach Tahmininin İspatı Üzerine

Goldbach tahmininin ispatı konusunda değişik ve ilginç yaklaşımlarla dolu mektuplarınız gelmeye devam ediyor.

İstanbul'dan Emre Osmanoğlu ve Uğur Başyayla iki asal sayının toplamının çift olması gerekmediğini hatırlatıyorlar. Sorun, aynı zamanda çift olan yegane asal sayı 2'den kaynaklanıyor. Bu nedenle 2 ile başka bir asal sayının toplamı bir tek sayı olmak zorunda. Aslına bakarsanız bu asal sayıyı Goldbach tahmininin ifadesinden çıkarmak mümkün. Sadece 4 çift sayısı 2 asalını kullanarak yazılabiliyor: 4=2+2. Diğer bütün çift sayılar için tek olan asal sayılara bakmak gerekiyor. Dolayısıyla problemi "4'ten büyük her çift sayı iki tek asalın toplamı olarak yazılabilir" şeklinde ifade etmek daha yerinde olacaktır.

İzmir'den Gökhan Kırhan, Murat Demirtaş, Ankara'dan İbrahim Güngör, Çankırı'dan Osman Tosun, Muğla'dan Onur Sürmen, İstanbul'dan Güçlü Tugay ve Serkan Divilioğlu, Goldbach tahminini kabaca "iki tek asalın toplamı çifttir" şekline dönüştürüyorlar. Buradaki yanlış anlama şuradan kaynaklanıyor. İspatlamamız gereken önerme "4'ten büyük *her* çift sayı iki tek asalın toplamı olarak yazılabilir" şeklinde. Bu önermeyi, buna oldukça benzeyen şu önerme ile karıştırmamak gerekir: "İki tek asalın toplamı 4'ten büyük *bir* çift sayıdır". Burada dikkat etmemiz gereken "çift sayı" ifadesinin önündeki *"her"* ve *"bir"* kelimeleri. Bu kelimeler iki önermeyi tamamen farklı yapıyor. Özellikle ikinci önerme çok kolay oluyor ve birinci önerme de çok zor! Bu ikinci önermeyi Goldbach tahmininin söylediğiyle aynı yapmak için "iki tek asalın mümkün olan tüm toplamları bulunduğunda, bu sayılar arasında 4'ten büyük *her* çift sayı vardır" gibi anlaşılması zor bir ifade kullanmak lazım.

Sıkça yapılan bir yanlış ispat türü ise kontrolsüz çift sayı seçimi. Bu tip ispatlar değişik şekillerde yapılabiliyor. Örnek vermek için aşağıda bu tip (yanlış) ispatların basitleştirilmiş bir şeklini veriyoruz.

Herhangi bir çift sayı seçelim ve buna $2n$ diyelim. Bu sayıdan küçük öyle iki asal sayı p ve q bulalım ki toplamları $2n$'den küçük olsun. Toplam çift olduğu için buna $2m$ diyelim: $p+q=2m$. Dolayısıyla tam olarak gösterdiğimiz şu: verilen bir $2n$ çift sayısından küçük öyle bir $2m$ çift sayısı vardır ki p ve q asal olacak şekilde $2m=p+q$ sağlanır. Geriye kalan $2m$ sayısının Goldbach tahminini sağladığı, böylece ispatın tamamlandığını iddia etmek. Bunu da değişik şekillerde yapmak mümkün.

Burada dikkat etmemiz gereken nokta $2m$ sayısının kontrolsüz olduğu. $2n$ sayısı ise kontrollü seçiliyor, yani $2n$ sayısı *herhangi* bir sayı olarak alınmış. Başka bir deyişle $2n$ yerine istediğimiz sayıyı koyar ve ispatın geri kalan kısmının doğru olduğunu görebiliriz. Ama $2m$ sayısı, ispatın ortasında beliriveriyor. Bu nedenle $2m$ sayısını istediğimiz bir sayı olarak seçmek mümkün değil. Sonuç olarak, yukarıdaki yanlış ispatta yaptığımız aslında iki tek asalın toplamının bir çift sayı olduğunu göstermekten farklı değil.

Konya'dan Hasan Hüseyin Koval ilginç bir taktikle yaklaşıyor probleme. Arkadaşımız Wilson teoreminin tersini kullanıyor. Wilson teoremi "eğer p bir asal sayı ise $(p-1)!+1$ sayısı p ile tam olarak bölünebilir" diyor. Bu teoremin tersi ise "eğer p sayısı $(p-1)!+1$ sayısını tam olarak bölüyor ise p bir asal sayıdır" şeklinde. (Eğer p bileşik bir sayı ise p'nin neden $(p-1)!+1$'i bölemeyeceğini gösterebilir misiniz?) Böylece arkadaşımız Goldbach'ın tahminini "verilen bir $2n$ çift sayısı için $(2n-p-1)!=K(2n-p)-1$ denklemini sağlayan bir p asal sayısı ve bir K tam sayısı vardır" şekline dönüştürüyor. Eğer arkadaşımız bu denklemin her $2n$ için belirtilen şekilde bir çözümü olduğunu gösterebilseydi, Goldbach tahminini ispatlamış olurdu. Ama ne yazık ki bu kısım bir kaç örnek vererek geçiştirmiş.

Elazığ'dan Ali Haydar Tunç Goldbach tahminini polinomlar için uygulamaya çalışmış. Çift polinom dediği polinomların iki asal polinomun toplamı olarak yazılabileceğini gösteriyor. Gerçekten asallık kavramı (kendisinden ve 1'den başkasına bölünememe) sadece pozitif tamsayılara özgü değil. Tamsayı katsayılı polinomlar için de asal polinom kavramı tanımlanıyor ama Goldbach tahmini sadece pozitif tamsayılara özgü bir önerme.

Bize gönderilen mektuplar arasında çok değişik yaklaşımlar çıkıyor. Ama ne yazık ki burada hepsini açıklamamız mümkün değil. Bu nedenle bu ay bize düşüncelerini ve ispatlarını gönderen diğer arkadaşlarımızın adlarını vermekle yetinmek zorundayız: Giresun'dan Emin Güdük, Adıyaman'dan Ahmet Ziya Bayhan, Uşak'tan Bünyamin Öktem, Kayseri'den Emre Timur, İstanbul'dan Ömer Faruk Okumuş, Ankara'dan Cafer Koç, Kırklareli'den Sevim Çetinkaya Malatya'dan Hüseyin, Kayseri'den Saltuk Buğra Aktürk, Sinop'tan Muharrem Necati Balıcanoğlu ve adreslerini bilmediğimiz Selçuk Yücel ve Sertaç Akdoğan. Bunlarda da matematiksel kesinlikte bir ispatın olmadığını ekleyelim.

Sadi Turgut