MATEMATİKSEL ORİGAMİ

Bulunacak Ne Kaldı Ki?

Matematikte doktora yaptığımı, bunun da en genel anlamıyla "daha önce çözülmemiş bir problemi çözmek" olduğunu söylediğimde en çok karşılaştığım sorudur bu; tüm içtenliği ile sorar karşımdaki "İyi ama, bulunacak ne kaldı ki?" Tabii,rakamlar bulundu, dört işlem var, ölçüp biçebiliyoruz hatta türevi, integrali bile keşfettik, daha ne olaki keşfedilmemiş? İşin içinde olmadıkça, yapılan üretimin tek sınırının insanoğlunun zihin gücü olduğunu bilmedikçe sorulması gayetr doğal sorular bunlar. Tam da doktoraya başladığınız ilk sene sorulduğunda biraz içinizi sıksa bile, çok geçmeden "Tabii ya, her şeyi buldular(!) peki ben şimdi neyi bulacağım?" dedirtip, gülümseten içten içe...

Matematik; felsefe gibi insanın zihin gücünü keşfettiği andan beri uğraştığı bir bilim, insanoğlunun kendi varlığını sorgulamasıyla başlayıp son hızla gelişmeye devam eden...Elbette çok sonuç var şimdiye dek bulunan ama keşfedilecekler, yaratılacaklar çok daha fazla. Zihin durmuyor çünkü; hayal gücü sınırlanamıyor. "Soyut"un en büyük avantajı bu belki de, "sonsuz" oluşu.

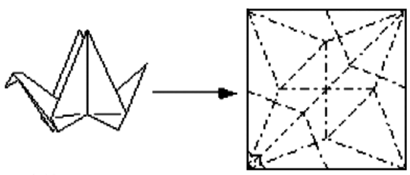
Günümüzde dört yüz binden fazla insan aktif olarak matematikle uğraşıyor, makale basıyor. Matematikte yazılan henüz basılmamış makalelerin paylaşıldığı en büyük internet sitesi olan arXiv'ın verilerine göre; 2006 yılının ilk yedi ayında sitede 4945 adet makale yayımlandı bu sayı tüm 2005 yılı için 7915, 2000'de ise 3016 idi. Yıllar geçtikçe bu işle uğraşan insan sayısı da, bulunan sonuç sayısı da artıyor. Elbette bu durum matematiğin bazı alanlarındaki "çözülmemiş problem" sayısını oldukça azaltıyor. Matematikçileri işsiz bırakmayansa, kapanmaya yüz tutmuş bu alanlara karşın keşfedilen yeni alanlar oluyor. Önceleri birbirinden farklı gibi gözüken alanların ortaklığı anlaşılıyor, "cebirsel geometri" örneğinde olduğu gibi. Yetmiyor, buna yüzlerce bin yıllık sayı teorisi dahil oluyor, "aritmetik geometri" çıkıyor karşımıza. Ama dedik ya zihnin sınırı yok, var oldukça düşünmeye devam ediyor insanoğlu,

düşündükçe buluyor ve an geliyor hepimizin bildiği, çocukken mutlaka uğraştığı bir uğraşla birleşiyor matematik. Üzerinde uğraşılmaya değer bir çok problemle, kilitli ama içi hazine dolu bir sandık gibi karşımıza çıkıyor: Matematiksel Origami.

Origami "katlanmış kağıt" anlamına gelen, Japonca bir kelime. "Kağıt katlama sanatı" olarak çevriliyor. Bu sanatla hepimiz uğraşmışızdır mutlaka, en azından kağıttan gemi katlamışlığımız vardır hepimizin. Demek ki bir yerinden bulaşmışız bu hikayeye...

Aslında 1930'lu yıllarda başlayan bu alan matematik dışında eğitim, teknoloji, bilgisayar gibi bir çok başka alanla da yakından ilişkili. Bu konudaki gelişmelerden haberdar olmak, birlikte çalışabilecek insanları buluşturmak amacıyla düzenlenen en büyük toplantı Aralık 1989'da "Uluslararası Origami, Bilim ve Teknoloji Konferansı" adıyla İtalya'da yapıldı. Aynı toplantının ikincisi 1994'de Japonya'da, üçüncüsü ise "3. Uluslararası Origami, Bilim, Matematik ve Eğitim Konferansı" adıyla 2000 yılında Amerika Birleşik Devletleri'nde gerçekleşti.Bu yılın eylül ayında da dördüncüsü düzenleniyor, yine Amerika'da, bu kez adı "4. Uluslararası Bilim, Matematik ve Eğitim Alanında Origami Konferansı". Başlıktaki değişimin nedeni alandaki gelişmelerle birlikte farkedilen ortaklık elbette. Peki nedir bu ortaklık? Bu soruyu cevaplamadan önce origaminin bazı temel ilkelerini ve terimlerini gözden geçirmekte fayda var.

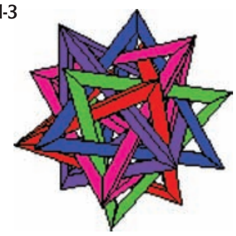
Aslında Çin kökenli bir sanat olan origami asıl gelişimini Japonya'da yaşadığı için japonlara mal edilir. Geleneksel origami –ki bizim de inceleyeceğimiz budur- yapıştırmadan ve kesmeden sadece katlayarak kağıttan şekil yapmakla ilgilenir. Origaminin şekil origamisi ve modüler origami olmak üzere iki temel çeşidi vardır. Şekil origamisinde tek kağıt kullanılır, en çok bilinen örneği turnadır(şekil-1) Turna 17 katlamadan oluşur. Şekil-2 de görülen at figürü de tek bir A4 kağıdının 80 kez katlanmasıyla elde edilmiştir. Modüler origami ise aynı biçimde katlanmış birden çok sayıda kağıdın birleştirilmesi sonucu oluşur. Elbette birleştirirken yapıştırılmaz. Örneğin şekil-3 deki origami beş farklı renkte altışar kağıdın yani otuz parçanın birleştirilmesinden oluşur. Üç boyutlu bir yapbozda olduğu gibi kağıtlar birbirinin içine geçer ve doğru açılarla birleştiklerinde dağılmadan dururlar.



Şekil-1

Şekil-2

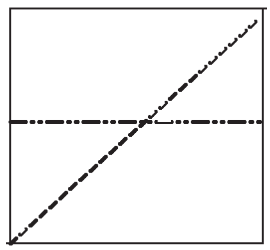
Şekil-3



Eğer origamiyi birinden değil de bir kitaptan ya da internet sitesinden öğreniyorsanız "origami diyagramlarını" okuyabilmeniz gerekir. Örneğin

Şeklinde bir işaret kağıdın bu çizgi boyunca dışa doğru katlanması gerektiğini söyler. Kare bir kağıdın ortasından bu izin geçtiğini düşünün kağıdı ikiye katlayacağız öyle ki katlayıp açıp yerine bıraktığımızda kabarık kısmı bize bakacak, bir "dağ" görüntüsü oluşacak. Origami dilinde bu katlamanın adı "dağ katlama".

İkinci en temel katlama olan "vadi katlama" - - - - - - - - - - - - - olarak gösteriliyor. Tahmin edeceğiniz gibi bu katlamada da bir vadi şekli oluşmalı. Örneğin önceki kat izimizde yeni bir vadi katlama eklersek:



İki katlama ters yönlerde olmalı, köşegen üzerinde yapacağımız katlama sonucu oluşan iz vadinin dibinden akan bir ırmak gibi düşünülebilir.

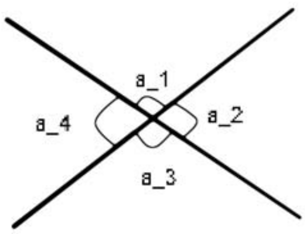
Katlanabilirlik

"Üzerinde kat izi olan bir kağıt verilmiş olsun, bu izlerin bir origami modelinin diagramı olup olmadığına nasıl karar veririz?"

Bu soru şekil origamisinin çok zor bir sorusu, "katlanabilirlik" olarak adlandırılıyor. Henüz çözülmüş de değil.

Bu alanda önde gelen matematikçilerden olan Thomas Hull problemin çözümüne bir yaklaştırmak için bile öncelikle "origami" sözcüğünün matematiksel olarak tanımlanması gerektiğini söylüyor, sadece bu bile oldukça zor.

Aslında tek köşeli diagramlar için problemin çözümü tamamlanmış. Bu konu için "köşe" kat izlerinin kesiştiği yer olarak tanımlanabilir. Örneğin son ve sondan bir önceki diagramlarda köşe sayımız bir. Japon kağıt katlama ustası Kawasaki tarafından bulunan bu sonuca göre tek köşeli bir diagramdaki köşenin etrafındaki açıları bir atlayarak topladığımızda toplam 180 derece olur.

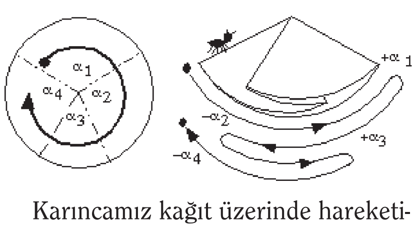


Örneğin yukardaki şekil için;

a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = 180 derecedir.

Bugün biliyoruz ki, üzerinde tek köşe izi bulunan her kağıt ancak ve ancak Kawasaki'nin sonucunu sağlıyorsa katlanabilir.

Aslında bu sonucun gerek koşul olduğunun ispatına burda yer verebiliriz. Diyelim ki, tek köşeli bir diagramımız var ve bu diagramın katlanabilir olduğunu biliyoruz, köşenin etrafındaki açıları a_i olarak gösterelim; i, 1'den 2n'e kadar giden tam sayıları temsil etsin. İzlerden katlayalım(nasıl olsa diagramımız katlanabilir!) İlk katlama izinin üzerinde(a_1 in hemen yanındaki) bir karıncanın durduğunu hayal edelim, karınca katlanmış şekil üzerinde, tek köşenin etrafında hareket etsin. Biz de onun hareketini diagramımızdan takip edelim. Harita üzerinde karıncanın hareketini, köşe etrafında bir çember olarak göreceğiz. Dört açılı bir örnek aşağıdaki gibidir:



Karıncamız kağıt üzerinde hareketine devam ederken aslında a_1 den başlayarak açılar boyunca ilerleyecek, ikinci kat izine ulaştığında yön değiştirip, a_2 açısını tarayacak. Bu şekilde devam edersek, karıncanın her tek sayıyla indekslenmiş açı için (a_1, a_3,...,a_{2n-1}) pozitif yönde, her çift sayıyla indekslenmiş açı içinse (a_2,a_4,...,a_{2n}) negatif yönde gideceğini görürüz. Ayrıca karıncamız seyahati bittiğinde, başlangıçtaki yerinde olacağı için, toplam açı değişimi de 0 olacak. Yani;

a_1 – a_2 + a_3 – a_4 +...-a_{2n} = 0

Ayrıca biliyoruz ki;

a_1 + a_2 + ... + a_{2n} = 360

İfadeleri taraf tarafa topladığımızda;

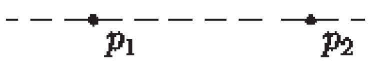
2(a_1 + a_3 + ... + a_ {2n-1})= 360 yani;

a_1 + a_3 + ... + a_ {2n-1} = 180. İspatın bu şekli ilk defa T.Hull tarafından 1994'de yayımlanmış. Bu sonucun yeter koşul olduğunu –yani bu sonucu sağlayan her tek köşeli diagramın katlanabilir olduğunu- göstermekse biraz daha zor ama yapılamaz değil!

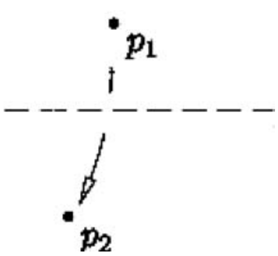
Origami Geometrisi (Origametri)

Nasıl ki lisede öğrendiğimiz Öklid geometrisi belli aksiyomlar(belit) üzerine kurulmuşsa (bknz Bilim ve Teknik, Haziran 2006,sf 84), Origami geometrisi de belitler üzerine kurulmuştur. İlk olarak Japon matematikçi Humiaki Huzita tarafından 1992 de ortaya konulan altı belite daha sonra Koshiro Hatori tarafından bir tane daha eklenmiş ve bu yedi belitin origametri aksiyomlarını tamamladığı Robert Lang tarafından ispatlanmıştır:

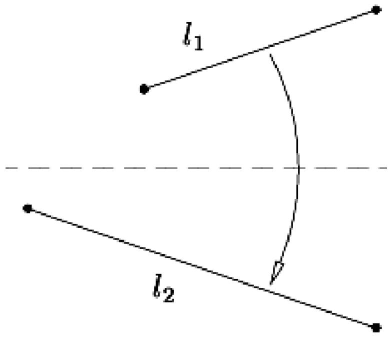
1. Herhangi iki noktadan yalnız bir kat izi geçer.



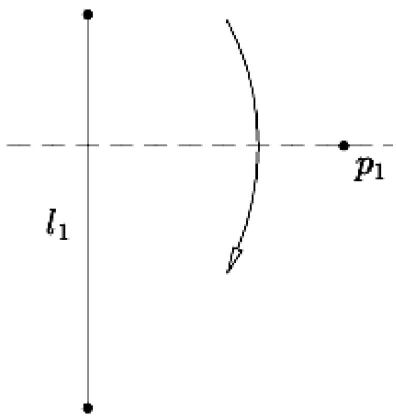
2. Verilen iki nokta için birini diğerinin üzerine katlayan yalnız bir katlama vardır.



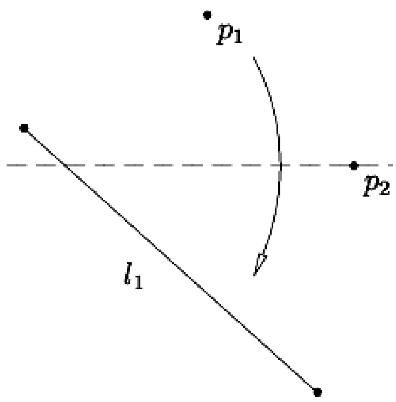
3. Verilen iki doğru için birini diğerinin üzerine katlayan bir katlama vardır.



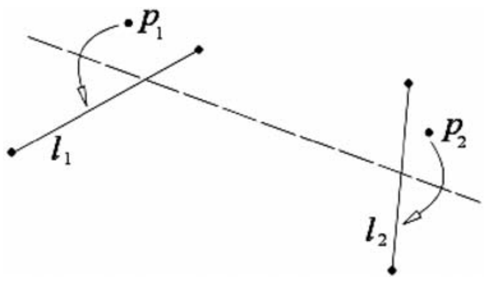
4. Verilen bir nokta ve bir doğru için,doğruya dik ve noktadan geçen yalnız bir katlama vardır.



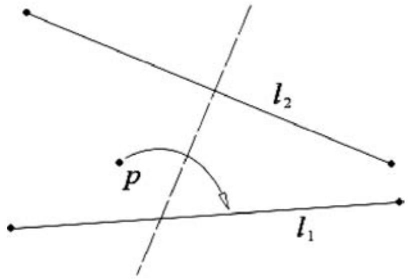
5. Verilen iki nokta p_1 , p_2 ve bir doğru l_1 için p_1'i l-1 üzerine katlayıp, p_2 den geçen bir katlama vardır.



6. Verilen iki nokta p_1,p_2 ve iki doğru için l_1,l_2; p_1'i l_1 üzerine ve p_2'yi l_2 üzerine katlayan bir katlama vardır.



7. Verilen bir nokta ve iki doğru l_1,l_2 için; noktayı l_1'in üzerine katlayıp, l_2'ye dik olan bir katlama vardır.

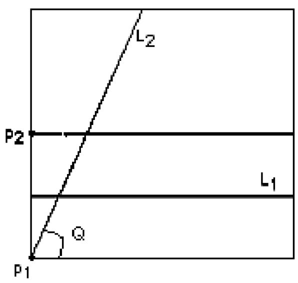


Her belitinin en fazla iki çözümünün olduğu Öklid geometrisinden farklı olarak, origami geometrisinin bazı belitlerinin 3 tane çözümü olabilir(örneğin 6. belit) Diğer bir deyişle; ölçüsüz cetvel ve pergel kullanarak ikinci derece denklemleri çözebilirken, origametri üçüncü dereceden polinomları da çözebilir.Bu nedenle klasik geometrinin çözemediği bir takım problemler origametride çözülür. Bunun en tipik örneği "açıyı üçe bölme" problemidir.

"Sonsuz uzunlukta ölçüsüz bir cetvel(tahta parçası) ve pergel kullanarak verilen herhangi bir açının üçte birini oluşturablir miyiz?"

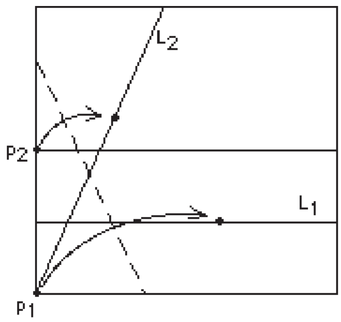
Örneğin 60 derece için bu mümkün değil ama klasik geometride! Origametride ise cevabımız "evet". Üstelik daha güçlü bir teori olmasına rağmen pratikte "sadece" kağıt katladığımız için işimiz daha da kolay. Önce üçe bölmek istediğimiz açıyı kağıdımızın sol alt köşesine yerleştirelim. Açının dar açı olduğunu varsayıyoruz ama bu metod geniş açılar için de uygulanabilir.

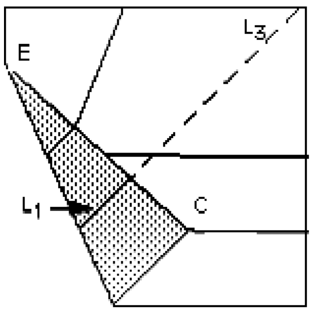
Kağıdın alt tarafına birbirlerinden eşit uzaklıkta iki paralel kat izi yapalım. İki katlamayla elde edebileceğimiz bir iz bu.



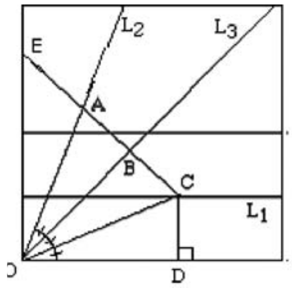
Daha sonra 6. beliti uygulayalım, p_1'i L_1'in üzerine ve p_2'yi L_2'nin üzerine katlayalım.

Bu katlamayı açmadan, L_1 hizasından tekrar katlayacağız.Yeni oluşan bu ize L_3 diyelim.





Şimdi ikinci adımda yaptığımız katlamayı açıp, L_3 çizgisini sol alt köşeye kadar uzatalım. Eğer düzgün katlayabildiysek, L_3'ün ucu tam sol alt köşeye denk gelecek ve L_2 ile L_3 doğruları arasında kalan açı Q'nun üçte biri olacak. Bunu kağıtta oluşan izlere yeni çizgiler ekleyerek ve üçgen benzerliğini kullanarak görebiliriz. C ve E noktalarını birleştiren doğru ile, C noktasından tabana dik inene doğruyu şekle eklediğimizde; AOB,BOC ve COD üçgenlerinin benzerliğinden bu üç açının birbirine eşit yani Q'nun üçte biri olması gerektiğini görürüz.



Eğitimde Origami

İlköğretimdeki matematik dersinizi sadece tahta ve tebeşir yerine rengarenk kağıtlarla yaptığınızı hayal edin. O gözümüzde canlandırmakta zorlandığımız objeler, elimizdeki küçük sihirli kağıt parçalarının katlanmasından, lego gibi birleşmesinden oluşsun sıramızın üstünde. Kenar sayısını, açısını, simetrisi gözümüzle görüp, elimizle tutalım, çok daha keyifli değil mi? Bir çok ülkede ilköğretim matematik kitaplarında yer alan origami aktiviteleri, ülkemizde de ilköğretimin ilk kademesinde okutulacak matematik kitaplarında yerini aldı. Belki de bu sayede bir kaç yıl sonra, "en çok korkulan dersler" listesinde göremeyeceğiz matematiği, ya da üniversite giriş sınavında en az net yapılan ders olmayacak. Öğrenciler renkli kağıtlarını, origami diagramlarını çıkarıp çözecekleri problemin modelini yapacaklar önce."Düzgün yirmi yüzlü" çocuk oyuncağı olacak onlar için...Hayal etmesi bile keyifli, hem neden olmasın ki?

Ekin Özman