

## Serbest Stil

$$\frac{16}{\frac{4}{2}}$$

$16+4+2$  ifadesini hesaplarken hangi  $+$  işlemine öncelik tanıdığımızın bir önemi yoktur. Yani  $(16+4)+2$  ve  $16+(4+2)$  sıralamalarının her ikisi de aynı sonucu verir. Böylece, sıralamadan bağımsız olarak hesaplanan bu ortak değer  $16+4+2$  işleminin sonucu olarak kabul edilir.

Bir  $*$  işlemi için daima  $(a * b) * c = a * (b * c)$  eşitliği sağlanıyorsa, bu işlemin birleşme özelliği olduğunu söyleriz ve bu ortak değeri  $a * b * c$  ile gösteririz. Örneğin gerçek sayılar üzerinde toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özelliği olduğu için  $16+4+2=22$  ve  $16 \times 4 \times 2=128$  yazabiliyoruz.

$(16-4)-2=10$  ve  $16-(4-2)=14$  olduğundan, çıkarma işleminin birleşme özelliği yoktur. Buna rağmen  $16-4-2$  işlemini anlamlı kabul edip hiç tereddüt etmeden sonucun 10 olduğunu söylüyoruz. Bunun sebebi nedir?

Çıkarma işlemi, toplama işleminin tersi olarak tanımlıdır. Yani, toplama işlemine göre  $b$ 'nin tersi (negatifi)  $-b$  ile gösterilmek üzere  $a - b$  işlemi  $a + (-b)$  olarak tanımlıdır. O halde  $16 - 4 - 2$  ifadesi  $16 + (-4) + (-2)$  şeklinde yazılabilir. Toplama işleminin birleşme özelliği olduğu için son işlem  $[16 + (-4)] + (-2)$  ya da  $16 + [(-4) + (-2)]$  sıralaması ile hesaplanabilir ve sonuç her iki durumda da 10 olur. İşte bu sonuç  $16 - 4 - 2$  işleminin sonucu olarak kabul edilir. Bir başka deyişle,  $a - b - c$  ifadesinde  $(a - b) - c$  sıralamasının gözetildiği kabul edilir.

$(16 \div 4) \div 2 = 2$  ve  $16 \div (4 \div 2) = 8$  olduğundan, bölme işleminin birleşme özelliği yoktur. Peki,  $16 \div 4 \div 2$ 'ye nasıl bir anlam verebiliriz? Bölme işlemi çarpma işleminin tersi olarak tanımlıdır. Böylece sıfır olmayan  $b$  gerçek sayısının çarpma işlemine göre tersi  $\frac{1}{b}$  olduğundan,  $a \div b$  işlemi  $a \times \left(\frac{1}{b}\right)$  olarak tanımlıdır.

O halde  $16 \div 4 \div 2$  yerine  $16 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$  yazabiliriz.

Çarpma işleminde birleşme özelliği olduğu için son yazılan ifade hangi sıralama kabul edilirse edilsin, 2'ye eşittir.

Yani  $16 \div 4 \div 2 = 2$  yazabiliriz. Bu yaklaşımı genelleştirerek  $a \div b \div c$  ifadesinde  $(a \div b) \div c$  sıralamasının gözetildiğini kabul edebiliriz.

Bölme işlemi için yapılan kabul, çıkarma işlemindeki kadar yaygınlık kazanmadığı için çoğu kez  $16 \div 4 \div 2$  ifadesi tanımsız olarak kabul edilebilmektedir. Bu sebeple, aynı ifadenin bir başka yazım türü olan  $\frac{16}{\frac{4}{2}}$ 'nin de belirsizlik taşıdığı düşünülür.

Şimdi de sayıların kuvvetlerine bakalım.  $16^{4^2}$  nedir?  $[16^4]^2 = 16^8 = 4.294.967.296$  mı yoksa  $16^{(4^2)} = 18.446.744.073.709.551.616$  mi?  $a^{b^c}$ 'nin hesaplanmasında da bir sıralama kabulü yapılmaktadır ve bu kabulün gerekçesi çok basittir. Yani,  $a^{b^c}$  ifadesi ya  $(a^b)^c$  ya da  $a^{(b^c)}$ 'ye karşı tutulmuştur. Öte yandan  $(a^b)^c$ 'yi  $a^{bc}$  olarak yazabiliyoruz. O halde,  $a^{b^c}$  yazdığımızda kastedilen  $a^{(b^c)}$  olmalıdır. Sonuç olarak  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$  kabul edilir.

## Temel'in Takası

Temel

sözlü yoklamadadır:

- 12'yi iki ile çarp.
- 24 öğretmenim.
- Bir daha çarp.
- Çarptım, gene yirmidört.

## Süs Havuzu

$$(1 + 1)^{11} - ((1 + 1 + 1))^{(1+1)} + 1 = 2013$$

$$\sqrt{2^{22}} - 22 - 22 \div 2 - 2 = 2013$$

$$(333 + 3) \times 3! - 3 = 2013$$

$$\frac{44}{4} ((4 + 4) \times 4! - 4 - 4 - 4 \div 4) = 2013$$

## 2013

## Kum Havuzu

### SEKİZ 8'DEN 1000

Sadece toplama işlemi ve beş tane 2 ile 28 şöyle elde edilebilir:  
 $22 + 2 + 2 + 2 = 28$ . Sadece toplama işlemi ve sekiz tane 8 ile 1000 elde edilebilir mi?

$$8?8 = 1000$$

### KEİR

Paydada bulunan sayıyı hem paya hem paydaya ilave ettiğimizde

$\frac{1}{3}$  sayısı iki katına eşit olur.

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1+3}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Aynı işlem sonucunda 5 katına eşit olan bir sayı var mıdır?

### KOŞU

Okul pikniğine giden arkadaşlar, eşit aralıklarla yol kenarında sıralanmış 16 ağacın birincisinin altında toplanarak sonuncuya kadar yarış yapmaya karar verir.

En öndeki koşucu 6 saniyede altıncı ağaca ulaşmıştır. Hızını sabit kabul ederek, bu koşucunun yarışı kaç saniyede tamamladığını hesaplayabilir misiniz?

Not:

Doğru cevap 16 saniye değildir.



Bir yarışta üçüncüyü geçen koşucu kaçınıcı sıraya geçmiş olur?

### ÇOCUKLARIN YAŞLARI

Salim bey üç çocuğa yaşlarını sorduğunda:

- Emirali "Altı sene sonraki yaşımlı, altı sene önceki yaşımlın karesi olacak" der.
- Güneş "Benim de 10 sene sonraki yaşımlı 10 sene öncekinin karesi olacak" der.
- Defne de "Benim yaşımlı üç sene sonra, üç sene önceki yaşımlın karesi olacak" der.

Çocukların yaşlarını bulabilir misiniz?



## Eğlence Havuzu

### UÇAK

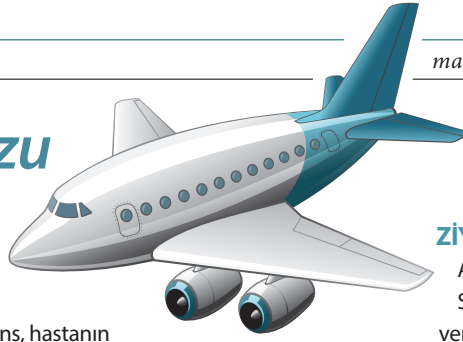
Bir hastanın ihtiyacı olan doku başka bir şehirden temin edilmiş ve hemen bir uçakla yola çıkarılmıştır. Bir ambulans, hastanın bulunduğu hastaneden tam uçağın ineceği saatte hava alanında olacak şekilde hareket etmiştir. Uçak planlanan zamandan biraz daha erken hava alanına inince zaman kazanmak için bir otomobille doku hastaneye doğru yola çıkarılmıştır. Otomobil yola çıkışından yarım saat sonra ambulansla karşılaşmış, doku ambulansa alınmış ve ambulans geri dönerek hastaneye, beklenen zamandan 20 dakika önce ulaşmıştır. Uçak kaç dakika erken inmiştir?

### RAKAMLARDAN 100

123456789 sayısının rakamları arasına 7 tane + ve - işareti yerleştirerek 100 elde etmenin tek bir yolu vardır:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100.$$

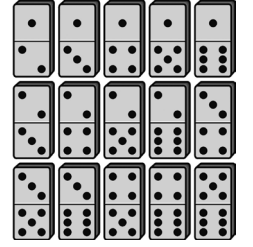
Sadece üç tane + ve - işareti ile 100 elde edebilir misiniz?



### ZİYARET

Ateş ile Güneş arkadaşları Selim'i ziyaret etmeye karar verir. Selim'in evine yürüyerek 4 saatte, bisikletle 1 saatte ulaşabilmektedir.

Kullanabilecekleri tek bir bisiklet olduğu için bir plan yaparlar. Aynı anda Ateş yürüyerek, Güneş bisikletle yola çıkar. Güneş yolun yarısına geldiğinde bisikleti yolun kenarında bırakıp yürüyerek devam eder. Ateş aynı noktaya geldiğinde bisiklete biner ve yolu tamamlar. Böylece ikisi de aynı anda ve yola çıkışlarından 2 saat 30 dakika sonra Selim'in evine ulaşmış olur. Bir dahaki sefer Ateş ve Güneş'e arkadaşları Defne de katılır. Üç arkadaş tek bir bisiklet kullanarak Selim'in evine kaç dakikada ulaşır? Dönüşlerinde Selim kendi bisikletini arkadaşlarına ödünç verir. Üç arkadaş iki bisiklet kullanarak kaç dakikada geri dönebilir?



### KESİR DOMİNOLAR

Domino taşlarından boş kare içerenleri ve çift olanları ayırırsak alttaki 15 taş kalır:

Her taşı kesir biçiminde yazılmış bir sayı olarak kabul edebiliriz. Bu taşları her gruptaki sayıların toplamı  $\frac{5}{2}$ 'ye eşit olacak şekilde, aşağıdaki gibi beşer taştan oluşan üç gruba ayırabiliriz.

Şimdi siz taşları öyle üç gruba ayırınız ki her grupta beş taş bulunsun ve her gruptaki sayıların toplamı 10 olsun. (Bu işlemi yapabilmek için bazı taşları ters çevirmeniz gerekecektir,  $\frac{3}{5}$  yerine  $\frac{5}{3}$  almak gibi.)

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{3} \end{array} + \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{5} \end{array} + \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{6} \end{array} = \frac{5}{2} \\ \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{3} \end{array} + \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{5} \end{array} + \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{6} \end{array} + \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{7} \end{array} = \frac{5}{2} \\ \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{4} \end{array} + \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{5} \end{array} + \begin{array}{c} \text{3} \\ \text{6} \end{array} + \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{7} \end{array} + \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{8} \end{array} = \frac{5}{2} \end{array}$$

### KİTAP

Arif bir kitabın ilk üçte birini günde 15 sayfa, ikinci üçte birini günde 20 sayfa geri kalanını da günde 25 sayfa okuyarak tamamlamıştır. Arif ortalama olarak günde kaç sayfa kitap okumuştur? (Not. Doğru cevap 20'dir.)



## Olimpik Havuz - 17. Genç Balkan Matematik Olimpiyatı, Antalya

Soru 1:  $\frac{a^3b-1}{a+1}$  ve  $\frac{b^3a+1}{b-1}$  sayılarının pozitif tam sayı olmasını sağlayan tüm  $(a, b)$  pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Soru 2:  $|AB| < |AC|$  olmak üzere  $ABC$  dar açılı üçgeninin  $\omega$  çevrel çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $[BC]$  kenarı üzerinde  $s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{CAO})$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınıyor.  $AD$  doğrusu  $\omega$  çemberini ikinci kez  $E$  noktasında kesiyor.  $M, N$  ve  $P$  sırasıyla,  $[BE]$ ,  $[OD]$  ve  $[AC]$  doğru parçalarının orta noktaları ise  $M, N$  ve  $P$  noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

Soru 3:  $ab \geq 1$  koşulunu sağlayan tüm  $a$  ve  $b$  pozitif gerçek sayıları için

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 4:  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere, Ayşe ve Burak aşağıda tanımlanan oyunu oynuyor:

- Ayşe, birbirinden farklı olması gerekmeyen  $n$  tane gerçek sayı seçiyor.
  - Ayşe, seçtiği sayıların tüm ikili toplamlarını bir kâğıt üzerine yazıp Burak'a veriyor (Kâğıtta  $\frac{n(n+1)}{2}$  tane birbirinden farklı olması gerekmeyen sayı yazılı).
  - Burak, Ayşe'nin oyunun başında seçtiği  $n$  tane sayıyı doğru olarak belirlerse oyunu kazanıyor
- Burak aşağıdaki durumlarda oyunu kesinlikle kazanacağından emin olabilir mi?

a.  $n = 5$                       b.  $n = 6$                       c.  $n = 8$

Cevaplarınızı açıklayınız.

[Örneğin  $n = 4$  durumunda Ayşe 1, 5, 7, 9 sayılarını seçerse, 2, 4, 6, 10 sayıları da aynı ikili toplamları vereceği için, Burak oyunu kesinlikle kazanacağından emin olamaz.]

## GEÇEN SAYININ ÇÖZÜMLERİ

## Kum Havuzu

## KÂĞIT SİLİNDİR

Kâğdın kısa kenar uzunluğu  $a$ , uzun kenar uzunluğu da  $b$  olsun. Karşılıklı kısa kenarları yapıştırarak oluşturulan silindirin hacmi  $\frac{ab^2}{4\pi} = \frac{ab}{4\pi} \cdot b$ , uzun kenarları yapıştırarak oluşturulan silindirin hacmi ise  $\frac{a^2b}{4\pi} = \frac{ab}{4\pi} \cdot a$  dir.  $b > a$  olduğu için, kısa kenarlar yapıştırıldığında elde edilen silindirin hacmi daha büyüktür.

## KIRIK ZİNCİR

Üç halkadan oluşan bir parçanın son halkasını açıp ikinci parçanın ilk halkasından geçirip kaynatalım. Şimdi ikinci parçanın son halkasını açıp üçüncü parçanın ilk halkasından geçirip kaynatalım. Böylece dört adımda zinciri oluşturabileceğimizi görürüz ve maliyet 20 TL olur. Öte yandan, ilk parçanın tüm halkalarını açıp bu üç parça ile diğer dört parçayı ikişer ikişer bağlayabiliriz. Problem toplam üç kaynak işlemi ile çözüldüğünden maliyet 15 TL olur.

## KÂR – ZARAR?

20 TL'ye aldığınız bir ürünü 21 TL'ye satarsanız  $21 - 20 = 1$  TL kâr edersiniz. Aynı ürünü 25 TL'ye tekrar alıp, 26 TL'ye satarsanız yine  $26 - 25 = 1$  TL kâr edersiniz. Sonuç olarak  $1 + 1 = 2$  TL kâr etmiş olursunuz.

## CEPTEKİ MİSKETLER

Vehbican'ın sağ cebindeki misket sayısını  $T$  (tek sayı), sol cebindeki misket sayısını ise  $\Ç$  (çift sayı) ile gösterelim. Bu durumda  $83 = 6T + 5\Ç =$  çift sayı olamayacağı için  $83 = 5T + 6\Ç$  olmalıdır. Bu eşitlik  $83 - \Ç = 5(T + \Ç)$  olarak yazılırsa,  $\Ç = 8$  ve  $T = 7$  bulunur. Sonuç olarak, Vehbican'ın ceplerinde toplam  $8+7=15$  misket vardır.

## Eğlence Havuzu

## TOPLAM

Problemi önce 2013 yerine 5 için çözelim.  $1+1+3$  toplamını  $x + x + xxx$  şeklinde,  $2+2+1$  toplamını  $xx + xx + x$  şeklinde gösterebiliriz. Buradan anlaşılacağı gibi,  $x \times x \times x$  sembollerinin arasındaki dört boşluktan ikisini seçip buralara  $+$  işareti

koyduğumuzda 5 sayısının üç pozitif sayının toplamı olarak bir ifadesini elde ediyoruz.  $+$  işaretlerinin koyulabileceği

yerler  $\frac{4 \cdot 3}{2}$  farklı şekilde seçilebilir:

$xxx + x + x$	$xx + xx + x$
$x + xxx + x$	$xx + x + xx$
$x + xx + xx$	$x + x + xxx$

O halde 5 sayısı üç pozitif tam sayının toplamı olarak 6 farklı şekilde yazılabilir:

$3 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1$	$1 + 3 + 1$
$2 + 1 + 2$	$1 + 2 + 2$	$1 + 1 + 3$

Benzer şekilde, 2013 sayısını üç doğal sayının toplamı olarak  $\frac{2012 \cdot 2011}{2} = 2.023.066$  farklı şekilde yazılabilir.

(Doğru cevap gönderen okurumuz: Yusuf Emre Köroğlu)

## ÇORAPLAR

Atölyedeki 10 kişinin bir saatlik ortalama çorap üretimini  $x$  ile gösterelim. Bu durumda ustanın bir saatlik çorap üretimi

$x + 9$  olur. Dolayısıyla  $x = \frac{9 \cdot 15 + x + 9}{10}$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten  $x = 16$  bulunur. Atölyede bir saatte toplam  $10 \cdot 16 = 160$  çorap üretilmektedir.

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Tunahan Aydoğdu, Hamide Begel, Zeynel Abidin Emir, Yusuf Emre Köroğlu)

## Alternatif Çözüm:

Ustanın ortalamanın üstünde ürettiği 9 çorap çıraklara birer birer dağıtılsa, herkesin ürettiği çorap sayısı aynı yani 16 olur. Böylece toplam üretim de 160 çorap olur.

## 99 TOPLAMINI BULMA

$99 = 9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1$  veya  $99 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21$  olarak elde edilebilir. Bu iki çözüm dışında çözüm yoktur.

(Doğru cevap gönderen okurlarımız: Tunahan Aydoğdu, Hamide Begel, Zeynel Abidin Emir, Yusuf Emre Köroğlu)

## ZAMANI DOĞRU GÖSTEREN YANLIŞ SAAT

Akrep ve yelkovanı yanlış monte edilen saat, bir kez doğru saati gösterdikten  $\frac{720}{11}$  dakika (yani yaklaşık 1 saat 5 dakika 27 saniye) sonra tekrar doğru saati gösterecektir. İlk kez saat 6:00:00'da doğru zamanı gösteren saatin bundan sonra doğru zamanı gösterdiği anlar şöyledir (saniyeler yuvarlanarak hesaplanmıştır):

7:05:27 – 8:10:55 – 9:16:22 – 10:21:49 – 11:27:16 – 12:32:44 – 1:38:11 – 2:43:38 – 3:49:05 – 4:54:33. Osman usta akşam dükkânını saat 8:10:55'de kapatmış, ertesi gün saat 7:05:27'de (mâkul bir erken saatte) açmıştır.

## Olimpik Havuz

## ASAL SAYILAR

Verilen  $p^4 + p^3 + p^2 + p = q^2$  denklemini  $p(p+1)(p^2+1) = q^2$  şeklinde yazabiliriz. Sol tarafta en az üç tane asal çarpan olduğu halde, sağ tarafta iki asal çarpan vardır. Dolayısıyla bu denklemin çözümü yoktur.

(Doğru cevap gönderen okurumuz: Yusuf Emre Köroğlu)

## PARALELLİK

$AI$  ve  $B'C'$  doğruları  $R$  noktasında;  $B'C'$  ve  $AA'$  doğruları  $S$  noktasında kesişsin.  $AA'$  doğrusu iç teğet çemberi ile  $A'$  den farklı bir  $T$  noktasında kesişsin.  $MP$ ,  $A'TB'$  üçgeninde orta kenar olduğu için  $PN$  ve  $TB'$  doğruları paraleldir. Böylece  $STB'$  ve  $A'PN$  üçgenlerinin benzer olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise  $ASR$  ve  $AIP$  üçgenlerinin benzerliği ile  $ATB'$  ve  $AB'A'$  üçgenlerinin benzerliği kullanılarak görülebilir.

(Doğru cevap gönderen okurumuz: Eyüp Amanvermez)

## CANKURTARAN EKİBİ

Ali Doğanaksoy,  
Çetin Ürtiş,  
Enes Yılmaz,  
Fatih Sulak,  
Muhiddin Uğuz,  
Zülfükar Saygı.

