Muammer Abalı

Dolu Taneleri

Matematik gerçekten çok ilginç durumlar taşıyor içinde. Bazen insan hayretler içinde kalabiliyor. Geçmiş sayılarımızda bu ilginçliklerin bir kısmını ele aldık. Kimisi bizi eğlendirdi, kimisi şaşırttı.

Bu sayımızda, şaşırtıcı başka bir ilişkiden söz edeyim izninizle:

Diyelim ki aklımızdan bir sayı tuttuk. Hadi bu sayıya n diyelim (Bu, sayılara n deme alışkanlığı aslında İngilizceden geliyor. Daha ziyade doğal sayılar için, "**n**umber=sayı" kelimesinin baş harfi), n bir doğal sayı. Sıfırdan büyük (meraklısına n>0 şeklinde gösteriyoruz).

Eğer bu sayı çift ise n/2'ye, eğer tek ise 3n+1 sayısına gönderiyoruz. Örneğin tuttuğumuz sayı 7 ise, tek olduğu için 21+1=22 sayısına gönderiyoruz. Sonra, 22 sayısı çift olduğu için 2'ye bölüyoruz, 11 sayısına gönderiyoruz. Buradan tekrar 3x11+1=34 sayısına, oradan 17'ye, 17'den 52'ye ve böylece devam ediyoruz.

Şimdi, acaba bu şekilde bir işlemle sayılar nereye gider? Sonsuza doğru büyüyüp giderler mi? Bir döngüye girip tur atıp dururlar mı yoksa en küçük sayıya, 1'e mi inerler?

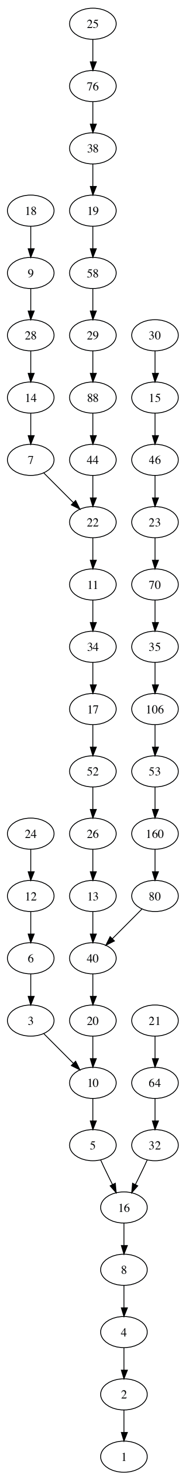
Bir iki deneme yapalım isterseniz: 1 sayısını alsak, önce 4'e, oradan 2'ye ve sonra da 1'e geri döner dizi. 2 sayısını alsak, önce 1'e oradan önceki gibi 4-2'ye ve sonra 1'e. 3 sayısını alsak, önce 10(3x3+1)'e, oradan 5(10/2)'ye, oradan 16(3x5+1)'e, sonra 8'e, sonra 4'e, sonra 2'ye ve nihayet tekrar 1'e. Dikkat ederseniz, bu örneklerde sayılar daima 4'e uğradıklarında doğrudan 1'e iniyorlar. Bir başka özelliğe daha dikkat edelim: Son uğradığımız sayı sanki yeni bir başlangıç gibi hareket ediyor. Yani, örneğin 10 sayısına herhangi bir başka sayıdan (aslında 10 sayısına 10=3x3+1 veya 10=20/2 sayılarından gelebiliriz) gelmişsek, ondan sonra takip edeceği dizi daima aynı oluyor: 5-16-8-4-2-1

Biraz büyükçe bir sayı alıp bakalım ne oluyor: n=17 olsun. Dizi, bilinen kuralımız çerçevesinde şöyle bir yol izleyecek: 17-52-26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1.12 adım sonra 1'e indi.

Kanımca yeterli örnek gördük. Gördüğümüz örneklerin hepsinde, hangi sayıyla başlarsak başlayalım, sonunda 1 sayısına gelip durduk. Daha doğrusu 1-4-2-1 döngüsüne girdik.

Dikkatinizi çekmiş olabilir: Sayılar 1-4-2-1 döngüsüne girmeden önce mutlaka 16'ya uğruyorlar. 16 sayısına ise ya 32'den (32/2=1) ya da 5'ten (3x5+1=16) geliyorlar.

Bu söylediklerime ikna olmadıysanız, isterseniz birkaç deneme de siz yapın. Ne kadar büyük olursa olsun, hangi sayıyı alırsanız alın, sonunda 4-2-1-4-2-1 döngüsüne döneceksiniz. Her seferinde de mutlaka 16 sayısına uğrayarak oraya geleceksiniz. Gerçi başlangıç sayınıza bağlı olarak, ulaşacağınız en büyük sayı ya da 4-2-1-4 döngüsüne kaç adımda döneceğiniz değişir, ama eninde sonunda 4-2-1-4 döngüsüne geleceğiniz ve dizinizin bu döngüye mutlaka 16 sayısına uğradıktan sonra gireceği gerçeği değişmeyecektir.



Daha ayrıntıya girmeden önce, 1 ile sonuçlanan çöküşün son 5 sayısına dikkat edelim: 16-8-4-2-1. Bu sayıların 2'nin üsleri olduğuna dikkat edin: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4

16 sayısına ulaşmak için iki değişik yol olduğunu söylemiştim: 32 veya 5. Bildiğiniz gibi 32, 2'nin 5. kuvvetidir. Oraya ise ancak 64'ten, yani 2'nin 6. üssünden gelebilirsiniz. Eğer 5'ten 16'ya geldiyseniz, mutlaka 10 sayısına uğramış olmalısınız. 10 sayısına ise 3x3+1=10 şeklinde ya da 20/2=10 şeklinde gelmiş olmalısınız. 20'ye gelmek için ise tek yol şudur: 40 (40/2=20), 40 için 13 (3x13+1) ve 80 (80/2=40). 80 sayısına gelebileceğiniz tek yer ise 160 olacaktır. Farkındasınız herhalde; 10-20-40-80-160 sayılarını 10'a bölecek olsanız, karşınıza yine 1-2-4-8-16 sayıları yani 2'in ilk 5 üssü çıkıyor.

Collatz sanısı adı verilen ve üzerinde sayısız araştırma yapılmış olan bu problem, Lothar Collatz tarafından 1937 yılında ortaya atılmış. Sanı, başlangıç sayısı ne olursa olsun:

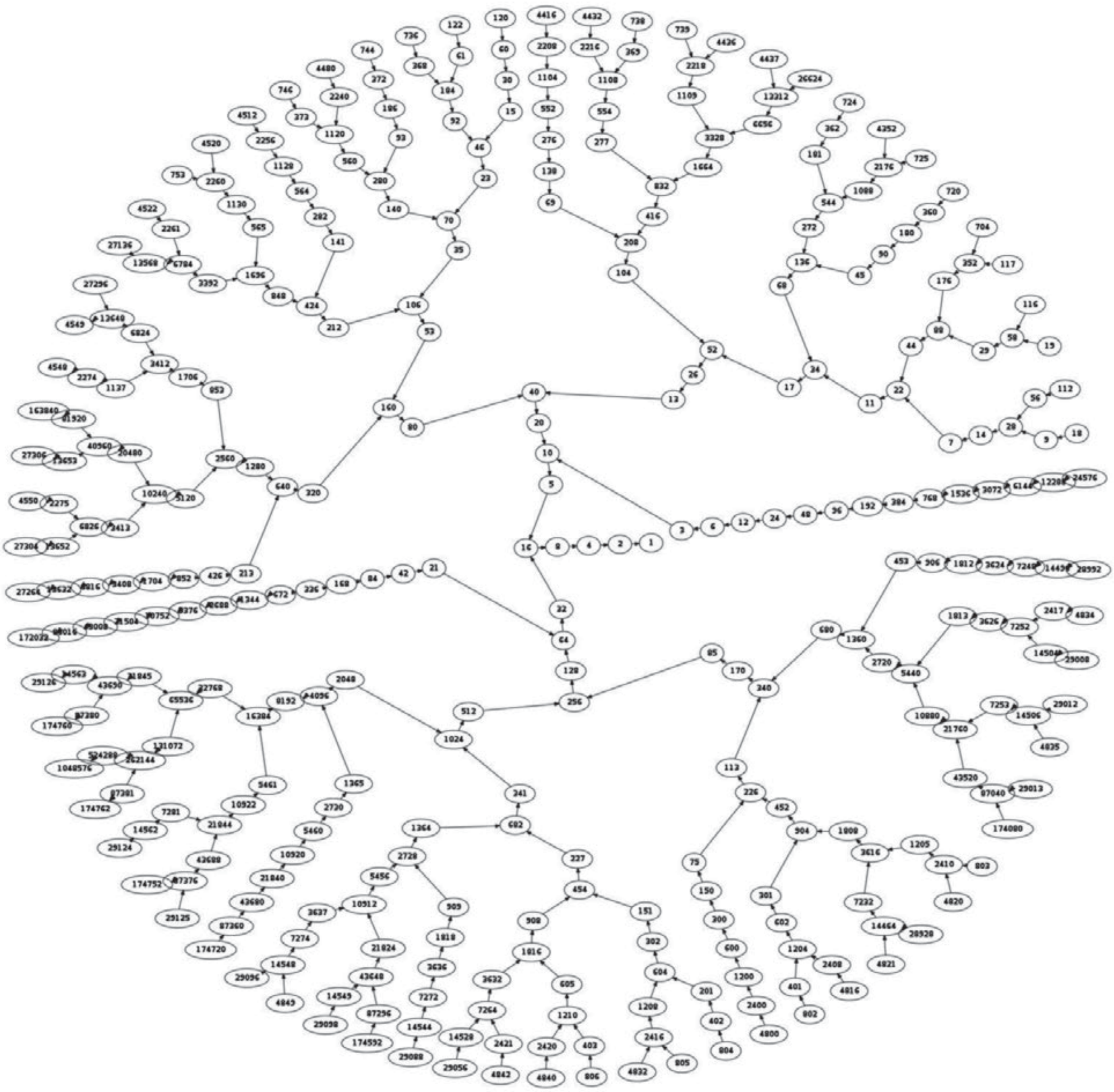
N tek ise 3N+1'e git

N çift ise N/2'ye git

fonksiyonunun yaratacağı dizi sonunda 1'e ulaşacaktır, şeklinde özetlenebilir.

Bu sanı henüz ispatlanabilmiş değil. Günümüze kadar, bilgisayarlar yardımıyla yapılan denemelerde, $20x10^{58}$ sayısına kadar olan başlangıç sayıları sonunda 1'e inmiş. Biraz evvel, bu dizilerin sona yaklaşırken uğradıkları sayılardan, bu sayıların 2 ile ilişkisinden söz ettim. Grafik olarak şöyle görünüyor:

Şimdi diyeceksiniz ki "İyi hoş ama, bu yazının başlığı neden dolu taneleri"? Ben de tam bu noktaya gelmiştim. Bu sayılarla ilgili iki önemli büyüklük var: İlki herhangi bir sayıdan başladıktan sonra, acaba sayı Collatz fonksiyonu uygulamasıyla kaç adım sonra 1 sayısına inecektir? Örneğin yukarıda yolunu takip ettiğimiz 17 sayısı 12 adım sonunda 1 sayısına iniyor. Örneğin 11 sayısını alsak yol şöyle: 11-34-17-… Daha fazla takip etmemize gerek yok. 17'den sonrasını zaten biliyoruz. 17, 12 adımda 1'e inerken, 11 başlangıcı 14 adımda 1'e dönüyor. Örneğin 24 sayısını alsak başlangıç olarak: 24-12-6-3-10-5-16-8-4-2-1 yolunu izliyor ve 10 adımda 1'e iniyor. Burada gördüğünüz küçük adım sayılarına bakarak hemen karar vermeyin. Başlangıç olarak 27 sayısını alırsak, adım sayısı 111'e yükseliyor. Yol ise şöyle: 27-82- 41-124- 62-31- 94- 47-142-71-214-107- 322-161- 484-242- 121-364-182-91-274-137-412-206-103-310-155-466-233-700-350-175-526-263-790-395-1186-593-1780-890-445-1336-668-334-167-502-251-754-377-1132-566-283-850-425-1276-638-319-958-479-1438-719-2158-1079-3238-1619-4858-2429-7288-3644-1822-911-2734-1367-4102-2051-6154-3077-**9232-**4616-2308-1154-577-1732-866-433-1300-650-325-976-488-244-122-61-184-92-46-23-70-35-106-53-160-80-40-20-10-5-16-8-4-2-1



100 milyondan küçük sayılar içinde en yüksek adım sayısı 949 ile 63.728.127 sayısına ait. Bir milyardan küçük sayılar içinde rekortmen 986 adım ile 670.617.279 sayısı. 10 milyardan küçük sayılar içinde rekor 1132 ve sayı da 9.780.657.630.

İşin asıl ilginç yanı ise bu sayıların, yolculukları sırasında ulaşacakları en yüksek nokta. Yolculuk boyunca çift sayılarda yarıya inerek, tek sayılarda 3 katının bir fazlasına çıkarak yavaş yavaş yükseliyorlar; bir doruğa ulaşana kadar. Sanki bir su buharı zerresi havada nazlı nazlı salınıyor, hava akımının etkisiyle kâh alçalıyor kâh yükseliyor. Sonunda ulaştığı bir yükseklikte hava o kadar soğuyor ki, aniden buz haline gelip hızla yere çakılıyor, bir dolu tanesi gibi. Hangi sayı ne yükseklikten yere çakılacak belli değil, ama mutlaka bir yükseklikte buz tutuyor ve hızla yere çakılıyor. Örneğin 17 ve 11 başlangıçlarının en yüksek noktası 52 iken ve orada buzlanırlarken, 27 sayısının buzlanma noktası 9232.

Ünlü Macar matematikçi Pál Erdős (1913-1996), matematiğin henüz bu tür problemleri çözebilecek seviyeye gelmediğini söyleyeli neredeyse 50 yıl geçti. Erdős haklı ise, demek ki matematiğin gidecek daha çok yolu var: Collatz sanısı hala ispatlanabilmiş değil. Ama uğraşanların sayısı giderek artıyor. Matematik meraklısı gençlerimizin de dirsek çürütmeyi sevdikleri bir matematik çetrefili bu.

Tatilde matematiği iyice bir kenara bırakmayın. Yanınızda bulunsun. Eğlendiricidir, doyurucudur.

Sevgiyle kalın.