

UÇSUZ BUCAKSIZ SAYILAR KÜMESİNE DEĞİŞİK BİR SINIFLANDIRMA:

CEBİRSEL VE AŞKIN SAYILAR

Birkaç dahiye istisnadan sayarsak matematik eğitimi herkes için sayı saymakla başlar diyebiliriz. Sayılar, genellikle okul öncesi çağda ezberlenir. Yeni bir dil öğrenmeye başlanıldığında ilk birkaç dersten biri sayılara ayrılır. Matematik denince akla ilk sayılar gelir ve hatta pek çoğumuza göre matematik sadece sayıların etrafında dönmektedir. Matematiksel bir kuram üzerine yazılmış bir kitabın sayfalarını çevirmek bile matematiğin sadece sayıların etrafında dönmediğini farketmenize yardımcı olacaktır. Ama şu da yadsınamaz bir gerçek ki, sayılar, matematiğin önemli bir parçası ve sadece matematikçilerin değil, tüm insanlığın ilgisini çeken çok özel bir konu. Yalnızca asal sayılara olan ilgi bile bu fikri desteklemeye yeterli.

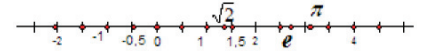
Pisagorcular ve İrrasyoneller

Aksi ispatlanıncaya dek bütün sayıların rasyonel olduğu, yani m ve n (n sıfırdan farklı) birer tam sayı olmak üzere, m/n şeklinde yazılabildiği zannedilmiş. Bu fikri özellikle güçlü bir şekilde savunan Pisagor, tüm sayıların rasyonel olduğunu mantık yoluyla ispatlamaya çalışmışsa da başarılı olamamış. Dik kenarları 1 olan ikizkenar dik üçgene pisagor teoremi uygulanınca elde edilen (hipotenüs uzunluğu) $\sqrt{2}$, pisagor okulu öğrencilerinin şüphelenmesine neden olmuş. Hikayeye göre Pisagorculardan Hippasus bu sayıyı m/n şeklinde ifade etmeye çalışırken asla öyle iki m ve n tamsayısı bulunamayacağını, yani sayının rasyonel ol-

madığını ispatlamış. Bu çalışması Hippasus'a pahalıya mal olmuş, çünkü irrasyonel sayıların varlığını bir türlü kabullenemeyen Pisagor, bu durumun fazla yayılmaması için Hippasus'un denizde boğularak öldürülmesi emrini vermiş. Tahmin edileceği üzere kısa vadeli bu çözüm irrasyonellerin varlığının yayılmasına engel olmaya yetmemiş.

Daha Bitmedi

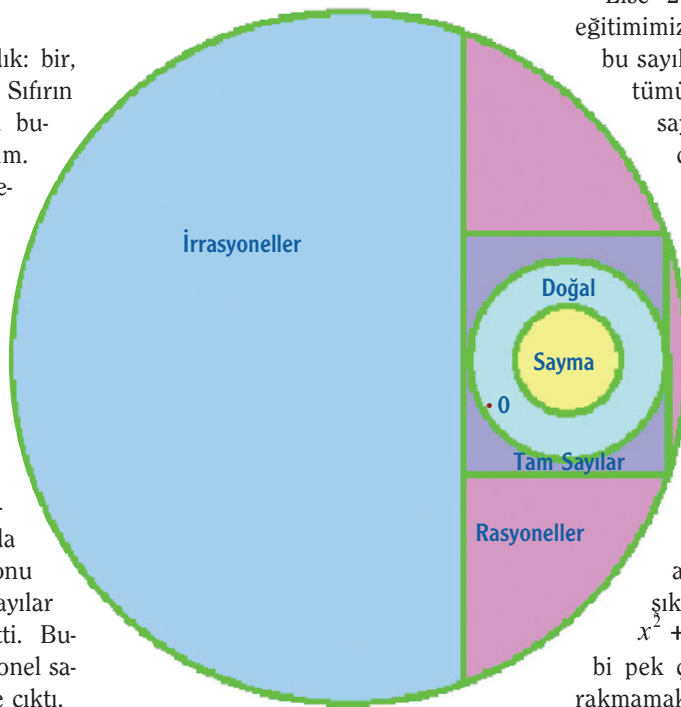
İrrasyonellerle birlikte gerçel (reel) sayılar kümesi tamamlanıyor. Yani bir sayı doğrusu üzerindeki tüm noktalara bir isim veriyoruz.



Bir iki üç

Saymaya önce 1'den başladık: bir, iki, üç... Kim sıfırdan başlar ki? Sıfırın sayma sayılarından çok sonra bulunmasına şaşırılmamak lazım. Sonsuza uzayıp giden bu kümeye 'sayma sayıları' adını verdikten sonra sıfırı da ekleyerek 'doğal sayılar' kümesini oluşturduk. Tabii bu küme de insanlığın ihtiyaçlarını karşılamaya yetmedi. Fazlasını düşündüğümüz kadar eksikliğini de düşünmemiz gerektiğinden, sıfırın öncesini yani negatif sayıları da kümemize ekledik. Oluşan kümenin adını da 'tamsayılar kümesi' koyduk. Sonu gelmeyen istek ve ihtiyaçlar sayılar kümesini alabildiğine genişletti. Buçuklular, çeyrekler derken rasyonel sayılar da bir gün tarih sahnesine çıktı.

Gerçel Sayılar



Lise 2'ye kadar olan matematik eğitimimiz boyunca karşımıza çıkan bu sayılar, emektar sayı doğrusunu tümüyle örttüğünden, başka bir sayı kümesinin var olduğunu düşünmeye gerek bile duymadık. Yeni bir türün hayal gücümüzün sınırlarını zorlayacağı açıktı. Doğrumuzda tek bir sayıya bile yer kalmamıştı, onları nereye koyabilirdik ki? Neye benziyorlardı ya da hangi amaca hizmet ediyorlardı şeklindeki soruları belki de düşünmeye fırsatımız olmadan kendileriyle bir gün ansızın tanıştırdık: Karmaşık (kompleks) sayılar. Amaç, $x^2 + 1 = 0$ örneğinde olduğu gibi pek çok denklemi çözümsüz bırakmamaktı. Karesi negatif olan hiç-

Bir Buluşum Var

Goldbach Önermesinin İspatı

Bilim ve Teknik Dergisi'ni elimden geldiğince takip etmeye çalışan birisiyim. Bilim ve Teknik Temmuz 2005 sayısını da aldım. Matematiğe meraklı bir genç olduğumdan, matematik ile ilgili kısımları okurum ilk önce dergiden. Ve bu sayıda şöyle bir şeyden bahsetmişsiniz:

"Haziran 1742'de Goldbach, Euler'e yazdığı bir mektupta "2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir" önermesinin, ya doğru olduğunu ispatlamasını ya da bunu sağlamayan bir örnek göstererek yanlış olduğunu ispatlamasını istemiştir. Bugüne kadar bu ifadenin tersti bir örnek bulan olmadıysa da onu ispatlayan da henüz çıkmadı."

Ben kendi çapımda birşeyler yaptım. Derin bir matematik bilgisine sahip olmadığımından, bu yaptıklarımı değerlendirmenizi rica ederim.

Saygılarla,

Erdal İmamoğlu

Çift sayı = çift sayı + çift sayı ya da
çift sayı = tek sayı + tek sayı

2 hem asal hem de çift sayıdır ve diğer bütün asal sayılar tek sayıdır.

Sayılar kümesine olan ilgiyi uzaklarda aramaya gerek yok! Dergimize gelen mektupları okumak bize yetiyor. Sizlerden gelen pek çok mektup özellikle asal sayılar üzerine yazılmış. Biz, içlerinden birinden gerçek bir buluşun çıkacağına dair umutluyuz. Ama şunu da belirtmekte fayda var ki daha çok çalışmamız gerekiyor. Özellikle matematiksel ispatın nasıl yapıldığına dair, daha çok bilgi edinmeliyiz. Takdir edersiniz ki yöntemini tam olarak öğrenmeden bir problemi çözmeye çalışmak kişiye oldukça zaman kaybettirir. Biz de ileriki yazılarımızdan birini ispat teknikleri konusuna ayırarak sizlere yardımcı olmaya çalışacağımıza dair söz veriyoruz.

Öncelikle Erdal arkadaşımıza çalışmasını bizimle paylaştığı için teşekkür ediyor, matematik alanında çalışmalarını devam ettirmesini tavsiye ediyorum.

Her çift sayı kendisinden küçük iki tek sayının toplamı biçiminde yazılabilir.

(4=2+2 ve 6=3+3 önermeye uygundur.)

6' dan büyük çift sayılar için,

$$2n = (n - a) + (n + a)$$

n tek ise a çift, n çift ise a tek sayı ve $n > a$, $n > 3$

$2n$ sayısından küçük tek sayılar kümesi = $\{n - a^*, n - a^*, \dots, n - a, n + a, \dots, n + a^*, n + a^*\}$

Yani, $2n$ sayısından küçük bütün pozitif tek sayılar bu kümenin birer elemanıdır.

O halde, $2n$ sayısından küçük en az iki tane asal sayı bu kümenin birer elemanıdır.

Ve asal olan her $(n-a)$ sayısına karşılık gelen bir $(n+a)$ sayısı da vardır. Çünkü, bu iki asal sayının aritmetik ortası n sayısıdır.

$(n-a)$ ve $(n+a)$ asal sayı, bu asal sayıların aritmetik ortası n , bu asal sayıların toplamı $2n$ olur.

(4=2+2, ve 6=3+3 toplamlarının önermeye uygun olduğunu kabul etmiştik)

O halde; 2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin Fermat'ın son teoremini çözen Andrew Wiles'in sadece bir teoremi ispatlamak için 30 yılını ayırdığını düşünürsek, çalışmanın ve bilgi birikiminin bu işin en önemli anahtarlarından biri olduğunu rahatlıkla farkedebiliriz.



İspat önce kendinizi sonra karşınızdaki insanları, ortaya attığınız tezin doğru olduğuna dair inandırma yöntemidir ve unutmayın, kendinizi

gerçekten inandıramazsanız yani içinizde bir şüphe dahi kalırsa karşınızdakini inandırmaz pek mümkün olmayacaktır. Erdal arkadaşımız yaptığı ispatta okuyucularımızın genelde düşüğü hataya düşmüş, ispatlayacağı ifadeyi doğru olarak kabul etmiş. Aslında bu, sık yapılan genel bir hata. İspatlar bazen öyle içinden çıkılmaz bir hal alıyor ki önermenizi doğru kabul edip devam ettiğiniz farkına bile varmıyorsunuz.

$$2n = (n - a) + (n + a)$$

$2n$ sayısından küçük tek sayılar kümesine bir örnekle bakalım:

16 için bu küme: $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ şeklinde olacaktır. Burada istendiği gibi 1+15, 3+13, 5+11, 7+9 hep 16'yı veriyor. Erdal arkadaşımız buradan sonra ispata:

"O halde, $2n$ sayısından küçük en az iki tane asal sayı bu kümenin birer elemanıdır."

Ve asal olan her $(n-a)$ sayısına karşılık gelen bir $(n+a)$ sayısı da vardır" diyerek devam etmiş ama $2n$ 'i ya da 16'yı oluşturmak için topladığı iki sayının sadece tek sayı olduğunu belirtmiş, onların asal olduğuna ilişkin bir çalışma yapmamış. Birisinin asal olduğu kesin olsa bile, toplanan diğer sayının da asal olduğuna dair elde kesin bir bulgu yok. Bu da doğruluğunu göstereceği ifadeyi doğru kabul etmesi anlamına geldiği için, ispatın çöktüğü nokta oluyor.

Bazen bir ifade çok inandırıcı gözükülebilir. Matematikçi olmanın yolu biraz şüpheci olmaktan geçiyor. Her duyduğunuza, gördüğünüze inanmayın ve satır aralarını okumak için kendinize fırsat tanıyın. İşte o zaman matematiğin insan beynine sağladığı olanaklardan faydalanma şansı bulabilir, hayatta karşılaştığınız pek çok problemi doğru ya da en azından uzun vadeli olarak çözebilirsiniz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA