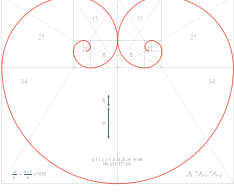


Emre Sermutlu

Yrd. Doç.Dr.,
Çankaya Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Aşkın Matematiği





Bir toplumda evlenme çağında olan ve kendine uygun eş arayan insanları en ideal şekilde nasıl eşleştirebiliriz?

Cağlar boyunca insanların kafasını meşgul eden bu problemin çapı, küreselleşme sonucu alabildiğine büyüdü. Bir kaç yüz kişilik bir avcı-toplayıcı kabilesinde yaşıyorsanız, potansiyel eşlerinizin sayısı (tabu gereği evlenemeyeceğiniz kuzenleri de çıkarınca) iki elin parmaklarını ancak bulur. Oysa şehir dışından evlenmenin artık sıradan olduğu günümüzde aday sayısı milyonları, hatta uluslararası evlilikleri de göz önüne alırsanız milyarları buluyor.

Gelin matematiksel düşünceyi, insanları yakından ilgilendiren bu probleme uygulayalım ve matematikçilerin de (yaygın kanının aksine) soyut bir teoremler evreninde değil yeryüzünde yaşadığını görelim.

Bir problemi matematiksel olarak çözmek için o problemi daha iyi tanımlamamız, koşulları netleştirmemiz ve belki gerçek olmayan bazı varsayımlar, kabuller yapmamız gerekiyor. İlk başta can sıkıcı gözüksün de, bilimsel ilerlemenin temeli basitten başlamak. Mesela toplumda eşit sayıda (n tane) kadın ve erkek olduğunu varsayarak işe başlayabiliriz.

Öncelikle evlenmek isteyen kişilerin tümünün karşı cinsten adayları kendi önceliklerine göre nasıl sıraladığını bilmemiz lazım. Yani elimizde kişi sayısı kadar liste olmalı ve her listede tüm adaylar baştan sona sıralanmalı. “Şu ikisinin arasında seçim yapamıyorum” veya “filancayla kesinlikle olmaz” gibi yorumları kabul etmiyoruz. Algoritma sizi listenizin en sonundaki kişiyle de eşleştirse masaya oturacaksınız, yoksa işin içinden çıkamayız! Unutmayın, kimsenin açıkta kalmaması en temel koşul.

Keşke herkesin bir ruh ikizi olsaydı ve herkes listede kimi tepeye koyuyorsa, kendisi de o kişinin listesinin en üstünde yer alsaydı. O zaman problem çok kolay çözüldü. Daha doğrusu ortada çözecek bir problem olmazdı! Ama sayısı belirsiz şarkı ve şiire

konu olan rekabetler, aldatmalar, terk etmeler, reddetmeler ve türlü düş kırıklıkları bize hayatın daha karmaşık olduğunu gösteriyor. Bir kişi birden fazla kişiyi sevebildiği gibi, o kişiyi de birden fazla kişi sevebilir. Dolayısıyla o da kendi en sevdiğiyle kendini en çok seven arasında kararsız kalabilir. Hatta belki de en iyisi üçüncü kişidir, biraz daha az sevdiği ve onu da biraz daha az seven, ama karşılıklı sevgi düzeylerinin eşit olduğu bir kişi.

Peki bu durumda çözümün nasıl olmasını istiyoruz? Üniversiteye giriş sınav sistemi gibi, herkesi mümkün olduğu kadar birinci tercihe, olmuyorsa ikinci tercihe mi yerleştirelim? Bu bir bakış açısı. Burada hedef 1. tercihe yerleşen insan sayısının maksimum olduğu yerleştirmeyi bulmak. Sonlu sayıda eşleştirme var (tam olarak $n!=n(n-1)(n-2)\dots 1$ tane) ve bunlardan biri (ya da belki bir kaç) mecburen maksimum olacak. Ama biz daha hedefte anlamadık ki. Belki de insanları yerleştirdiğimiz ortalama tercih numarasının mümkün olduğu kadar küçük olması daha iyi bir fikirdir. Yani sadece en üst tercihe odaklanmak yerine, mümkün olduğu kadar üst sıralarda bir tercihe yerleştirmeye çalışmak.

Bu iki hedef yakından ilişkili de olsa farklı bakış açılarını temsil ediyor ve farklı çözümlere götürüyor. Örneğin bir kişinin 1., diğerinin 100. tercihe yerleştiği bir eşleşme ile, aynı kişilerin 2. ve 90. tercihlerine yerleştiği ve diğer her şeyin (hemen hemen) aynı kaldığı ikinci bir eşleşmeyi göz önüne alalım. Yani bir kişiyi 1 basamak geriletirken diğerini 10 basamak ilerletmişiz. Sadece 1. tercihlerin sayısına bakıyorsa ilki, ortalamaya bakıyorsa diğeri daha idealdir.

Üçüncü bir bakış açıysa, en son tercihe yerleşen insan sayısını minimum yapmaya çalışmak. Bu da mutsuzluğu en aza indirmek anlamı taşıyor. İlk bakış açısı mutluluğun en üst düzeye çıkarılmasıydı. İsimler benzese de sonuçlar çok farklı.

| | Ahu | Banu | Ceylan |
|---|--------|--------|--------|
| 1 | Emir | Ferhat | Doruk |
| 2 | Doruk | Emir | Ferhat |
| 3 | Ferhat | Doruk | Emir |

| | Doruk | Emir | Ferhat |
|---|--------|--------|--------|
| 1 | Banu | Ceylan | Ahu |
| 2 | Ahu | Banu | Ceylan |
| 3 | Ceylan | Ahu | Banu |

Örneğin 3 kadın ve 3 erkekten oluşan bir topluluk düşünelim. Tercih sıraları yukarıdaki tabloda verildiği gibi olsun. Şimdi iki ayrı eşleştirmeyi göz önüne alalım:

- 1: Ahu-Emir, Banu-Ferhat, Ceylan-Doruk
- 2: Ahu-Doruk, Banu-Emir, Ceylan-Ferhat

Eğer amacımız mutluluğu maksimum yapmak ise 1. eşleştirme 2. eşleştirmeden kesinlikle daha iyi, çünkü onda tam 3 kişi ilk tercihiyle eşleşmiş, diğerindeyse bu sayı sıfır.

Ama olaya mutsuzluğu minimum yapmak açısından bakarsak 2. eşleştirmenin üstün olduğu bariz, çünkü hiç kimse sonuncu tercihiyle eşleşmemiş. Ama diğerinde tam 3 kişi kendini bu nahoş durumda bulmuş.

Diğer bakış açısı, yani “ortalama toplumsal mutluluk” ne diyor peki? O açıdan bu iki yerleştirme arasında bir fark yok, çünkü ikisinde de insanlar ortalama 2. tercihine yerleşmiş. Birinde 2,1 gibi bir sonuç çıksaydı bir fark olacaktı, ama yok. Farklı üç bakış açısından “ideal” çözümlerle ilgili farklı yorumlar geliyor.

Hangi hedefi seçeceğimiz bizim değer yargularımızla ilgili bir şey; matematik orasına karışmaz. Ayrıca bu üçünün dışında başka bakış açılarından başka koşullar da getirilebilir. Örneğin “2 kişi karşılıklı olarak birbirinin 1. tercihiyse doğrudan eşleşmeli” gibi. Bilgisayar sistemlerinde olduğu gibi matematikte de doğru çıktı ancak doğru girdiyle mümkün olur.

Problem gittikçe içinden çıkılmaz bir hal alıyor, üstüne üstlük temel kabullerde ciddi bir sorun var: Karşı cinsten mesela bir milyon kişiyi tercih sırasına koyabileceğinizden emin misiniz? Buna ne zaman yeter, ne kafa (yoksa kalp mi demeliydim). Mecburen işin bu kısmını da algoritmik hale getirmek lazım.

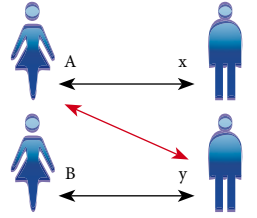
Kişileri nasıl sıralayacağımız sorusu görüldüğü kadar da soyut bir soru değil. İnternetteki “evlilik siteleri” tam olarak bu problemle karşı karşıya. Her kullanıcıya 3-4 milyon değil 3-4 tane, ama büyük bir ihtimalle karşılıklı olarak uyuşacakları adaylar göstermeliler. Bu işin sırrını ilk çözenler belki de internet tarihine adını altın harflerle yazdırır, tıpkı Google’ın ve Facebook’un kurucuları gibi.

Yine kayaya tosladık. İşleri iyice basite indirgeyelim ve bir daha deneyelim: Adayların sayısı sadece 2 olsun. Artık bu kadarını da bekleme hakkımız var değil mi? Akli başında bir insanın, tüm özellikleri verilen karşı cinsten iki kişiyi sıralayabildiğini, yani birini öbürüne tercih ettiğini varsayalım. “Karar vermiyorum” cevabını kabul etmeyelim. Bunu yapabiliyorsak, verilen n sayıda kişiyi de sıralayabilir miyiz?

Cevabımız açık ve net bir “evet” ise biraz daha düşünün derim. Örneğin 3 talibi olan Gonca’nın durumunu ele alalım. Adaylarda 3 özelliğe bakıyor: Karakter, fiziksel çekicilik ve maddi durum. Bu üç özellikten ikisinde önde olanı tercih ediyor. Hayli mantıklı ve n sayıda adaya genelleştirilebilecek bir sistem.



Kahramanımızın ikilemi şu: İlk talibine evet derse, belki de ondan biraz sonra gelecek daha iyi bir kısmeti tepmiş olacak. Hayır derse, belki de sonradan geleceklerin hiç biri o kadar iyi olmayacak ve o da n . kişi her kimse mecburen ona “evet” diyecek.



Ama gelin görün ki adayların sıralaması karakter yönünden Kayra, Levent, Mert; fizik yönünden Levent, Mert, Kayra; maddi yönden de Mert, Kayra, Levent şeklinde.

Bu durumda Gonca'nın gözünde Kayra Levent'ten, Levent de Mert'ten daha üstün. Buraya kadar her şey yolunda, ama Kayra ile Mert'i karşılaştırırsak Mert üstün! Gel de çık işin içinden.

Eğer Gonca 3 yerine sadece 1 özelliğe bakıyor olsaydı bu duruma düşmeyecekti, çünkü bir boyutta sayıların bariz bir sıralaması vardır. Hani yıllar önce gördüğümüz sayı doğrusu bu konudaki ilk ve son sözdür. Örneğin adayları sadece karakter yönünden sıralasaydı, düz bir çizgiye yerleşeceklerdi. (Tam eşitlik matematiksel olarak mümkün olsa da, gerçek dünyada çok nadir görülür.)

Ama iki ve daha yüksek boyutlarda işler değişiyor. Fazla sayıda parametre işleri her zaman karıştırıyor, çünkü adayların biri bir boyutta, diğeri de diğeri boyutta önde olabiliyor. Telefon satın alırken bile "Bunun ekranı öbüründen güzel, ama onun da kamerası daha iyi" diye derin derin düşündüğünüz olmuyor mu? Sonuçta farklı özellikleri birbiriyle karşılaştırmak durumundayız ve vereceğimiz her karar da tartışmaya açık. Elbette bir seçenek sizin için anlamlı tüm özellikler açısından diğerinden üstünse o zaman ortada problem kalmıyor, ama gerçek dünyada böyle olma ihtimali nedir?

Belki de bu yüzden bazı insanların gözünde bütün problemlerin çözümü açık ve net. Baştan az sayıda parametreyle çalışmayı seçmişler!

İdeal eşleştirmenin bir diğer tanımı ise kişilerin eşlerini aldatmak için bir motivasyonları olmaması. Mesela sistem A ile x kişisini, B ile de y kişisini eşleştirdi diyelim. (A ve B kadın, x ve y de erkek olsun) Eğer A'nın gözünde y , x 'ten daha iyi ve aynı anda y 'nin gözünde A, B'den daha iyiyse, A-y ikilisinin eşlerini aldatmak için sebepleri var demektir. Allah-tan böyle bir durumun imkânsız olduğu çözümleri veren algoritmalar var.



Ünlü matematik ve astronomi bilgini Johannes Kepler, tam da bu problemle karşı karşıya kalmış görünüyor. İlk eşinin 1611'de genç yaşta ölümünden sonra, çocukları da henüz küçük olan Kepler evlenmeye karar verir. İki yıllık bir süreçte, tam 11 farklı adayla görüşür. Hepsinin de olumlu ve olumsuz yönlerini uzun uzun değerlendirir (adayların bir kısmı bu aşamada başkalarıyla evlenir) ve en sonunda 5. adayda karar kılar.

İlgiçtir, Kepler eğer 1/e yöntemini uygulamış olsaydı, ilk 4 adayı reddedip onlardan daha iyi olan ilk adayla evlenecekti ki bu da yine 5. kişi demek olacaktı.

Kepler kendi kişisel problemini de gezegenlerin yörüngelerini olduğu gibi matematiksel bir temele oturtmayı deneseydi, muhtemelen son 6 adayla vakit kaybetmesi gerekmeyecekti.

En iyisi biz gittikçe dallanıp budaklanan bu toplumsal problemi (kararlı evlilik problemi) bir başka yazıya bırakıp daha kişisel ve daha romantik bir probleme odaklanalım. Hayata bir kişinin tercihleri açısından bakalım.

Mesela geleneksel bir toplumdaki bir genç kıızı hayal edelim. Çevresindeki kendinden büyük genç kızlara bakarak, kendisine yaklaşık olarak kaç kişinin talip olacağını tahmin edebiliyor: Tam n kişi. Sıralama konusunda da bir sorun yok diyelim. Ama bu sefer de şöyle bir sorunla karşı karşıyayız: Her bir talibe, teklifte bulunduğu anda cevap vermesi gerekiyor: Evet ya da hayır. İkisinin de geri dönüşü yok. Talipleri bekletip daha sonra gelecek teklifleri gördükten sonra karar verme lüksü yok. (Düşününce “belki”nin neden bu kadar popüler bir cevap olduğu anlaşılıyor.)

Özetle, kahramanımızın ikilemi şu: İlk talibine evet derse, belki de ondan biraz sonra gelecek daha iyi bir kısmeti tepmiş olacak. Hayır derse, belki de sonradan geleceklerin hiç biri o kadar iyi olmayacak ve o da sonuncu (yani n .) kişi her kimse mecburen ona “evet” diyecek.

Araba devrildikten sonra yol gösteren çok olur, derler. Bu durumda da hata yapıldıktan sonra bilmişlik taslayıp “Ben sana söylemiştim” demek çok kolay. Zor olan olay olmadan önce, genel durumda en iyi sonuçları veren bir strateji bulmak.

Mesela ilk talibe evet demek bir stratejidir. Taliplerin çekicilik sıralaması tamamen rastgele (yani öngörülemez) olduğu için, bu stratejinin başarıya ulaşma ihtimali $1/n$ 'dir. Belki de bu yüzden, çok nadiren uygulanır.

İlk talibi reddedip sonra gelenler içinde daha iyi olan ilk teklifi kabul etmek daha iyi bir fikir. Biraz düşünersek, ilk talibin en iyisi olduğu istisnai durum hariç, bu stratejinin daha iyi sonuç verdiğini görebiliriz.

Bu fikri biraz daha ilerletip ilk 2, 3 ya da 4 kişiyi otomatik olarak reddedip sonra gelenler arasından reddedilenlerden daha iyi olanı seçebiliriz. Ama çok da fazla ilerletmeyelim, yoksa en iyiyi de otomatik olarak reddetme ihtimali artar. Peki, ideal durma noktası neresi?

Örneğin $n=5$ durumunda ilk adayı kabul etme stratejisi bizi %20 ihtimalle başarıya götürecektir. Ancak ilk adayı otomatik olarak reddettiğimiz durumda, reddedilen aday:

1 numara ise başarı (yani 1 numarayı kabul etme) ihtimali 0 olur.

2 numara ise garanti yani 1 olur.

3 numara ise 1 ile 2 arasından ilk gelen kabul edileceği için 0,5

4 numara ise 1, 2, 3 arasından ilk gelen kabul edileceği için 0,33

5 numara ise 1, 2, 3, 4 arasından ilk gelen kabul edileceği için 0,25 olacaktır.

Toplamda birinciyi yakalama ihtimali 0,417 (%41,7) olur.

Aynı düşünce tarzıyla, gelen ilk 2 kişiyi reddedersek başarı ihtimali %43,3, ilk 3 kişiyi reddedersek %35, ilk 4 kişiyi reddedersek 5. kişiyi mecburen kabul edeceğimiz için şansımız -ilk stratejideki gibi- %20 olacaktır. Yani en iyi strateji ilk 2 kişiyi reddetmektir.

Bu problem işe eleman alma problemiyle matematiksel anlamda özdeştir (işverenin görüşmeden hemen sonra adaya net bir cevap vermek zorunda olduğu varsayımıyla). Literatürde daha çok “sekreter problemi” olarak geçen bu problem 1950’lerde ortaya atılmış, 1960’larda yaygınlaşmış, 1984’te de çözülmüştür. Çözümü, matematiğin π ’den sonra en popüler sayısı olan e ’yi içerir. (Doğal logaritmanın tabanı) İdeal durumda adayların $1/e$ (yaklaşık %36,8) kadarı reddedilmelidir.

Ancak bu çözüm de kabuller çerçevesinde doğrudur. 1 numarayı bulma fikrine odaklıdır ve listedeki 2 numara veya en son numara ile eşleşme durumları arasında ayırım yapmaz. Bu bakış açısıyla her ikisi de başarısızlıktır. Oysa sonuçta kabul edilen adayın ortalamasını iyileştirmeye çalışmak muhtemelen daha iyi bir fikir olacaktır. Problemin daha az bilinen bu halinin çözümü ise $\sqrt{n-1}$ sayısını içerir.



n sayısı 10 civarındayken iki bakış açısı arasında pek fark yoktur. Ama mesela $n=25$ ise, biri 4 diğeri 9 kişiyi reddetmeyi tavsiye eder.

Peki aday sayısının ne olduğunu daha en baştan biliyor olmamıza ne dersiniz? Sizce bu durum ne derece gerçekçi? En iyisi onu da bir ihtimale bağlamak. Yani kapınızı çalan her bir adayın, en son aday olma ihtimali olmalı. Böylece “doğru” hamleyi yapmak daha da zorlaşmalı.

Bu çözümlerdeki bir başka sorun ise adayların değerlerinin tamamen rastgele dağılmış olmasıdır. Halbuki belli bir ortalama etrafında istatistiksel anlamda normal olarak (çan eğrisi şeklinde) dağılmış olduklarını varsaymak daha gerçekçi olacaktır. Zaten deneysel çalışmalar insanların kuramsal olan 0,368 oranından önce karar verdiğini gösteriyor. Örneğin $n=1000$ gibi istisnai bir durum için kuram 368 diyor, ama siz en fazla 15-20 adayı gözlemleyip ortalama ve standart sapma konusunda mantıklı bir tahmine ulaşabilir ve oradan da “iyi” ve “çok iyi” adayları belirleyebilirsiniz.

Peki teklif yapmak istediğiniz kişinin aynen bu stratejiyi uyguladığını biliyorsanız, o zaman ne yapmalısınız? Elbette ilk %37’den uzak durmalısınız, yoksa hiç şansınız yok. Ancak o da sizin böyle yapacağınızı biliyorsa strateji değiştirecek ve bu sefer problem oyun kuramının çetrefil bilemeceleri arasında yerini alacaktır.

Ama hangi stratejiyi uygularsanız uygulayın, problemin özü değişmiyor: Diğer insanların listesinde ortalama kaçınıcı sırada olduğunuzu anlamaya çalışıyorsunuz ve gözlem sonuçları genelde ilk baştaki tahminleri tutmuyor.

Bu yazıda bir çok problem üzerinde düşündük, pek çok paradoksla tanıştık ama pek az çözüme rastladık. Herhalde aşkın matematiği de kendisi kadar anlaşılmaz olduğu için!

Çizim: Ersan Yağız

Kaynaklar

- <http://www.math.harvard.edu/~erihl/pechakucha.pdf>
- Freeman, P. R., “The Secretary Problem and Its Extensions: A Review”, *International Statistical Review*, Cilt 51, s. 189-206, 1983.
- Ferguson, T. S., “Who Solved The Secretary Problem?”, *Statistical Science*, Cilt 4, s. 282-296, 1989.
- Bearden, J. N., “A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs”, *Journal of Mathematical Psychology*, Cilt 50, s. 58-59, 2006.
- <http://www.npr.org/blogs/krulwich/2014/05/15/312537965/how-to-marry-the-right-girl-a-mathematical-solutions>

