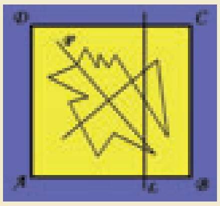
Engin Toktaş
matematik_kulesi@yahoo.com

Eğrisiyle Doğrusuyla



Kenar uzunluğu 1 birim olan bir ABCD karesi olsun ve n harfi de rasgele seçtiğimiz bir pozitif tamsayıyı temsil etsin. Bu karenin içine toplam uzunluğu 2n'den büyük olmak koşuluyla tamamen doğru parçalarından oluşan P eğrisini çizeceğiz. Kanıtlayınız ki karenin kenarlarından herhangi birine paralel olan ve P eğrisini en az n+1 noktada kesen bir L doğrusu mutlaka vardır. (P eğrisi istediğiniz parça sayısında olabilir ve kendi ile bazı noktalarda kesişebilir.)

Aranan İspat

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

Eşitliklerde sayıların belli bir kuralla ve harmoniyle dizilmeleri, ilginçlikleri nedeniyle ile birçok matematik severde hayranlık uyandırır. İşte bu ilginç eşitliklerden bir örnek:

Bu ilginç eşitliğin bir de sade ve güzel bir ispatı var. Bu eşitliğin geçerli olduğunu gösterebilir misiniz?

Sayılardan Bulmaca

0'dan 9'a kadar tüm rakamların sadece bir kere kullanıldığı çeşitli sorularla mutlaka karşılaşmışsınızdır. Bu seferki soruda ise alışılagelmiş dört işlemin yanında bir de logaritmik hesaplama da var. Estetik güzelliği olan bu ifadenin neye eşit olduğunu bulabilir misiniz?

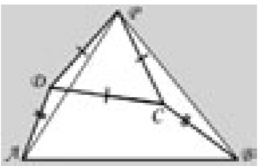
Hayali Sıra

Ülkemizde sinema biletinin 50 kuruştan satıldığını ve sinema izleyicilerinin gişeler önünde uzun kuyruklar oluşturduğunu varsayalım (ne yazık ki bu sadece bir varsayım!). 2n kişinin oluşturduğu bir gişe kuyruğunda n kişi gişeye bütün 1 YTL vererek, diğer n kişi de 50 kuruşluk demir para vererek ödeme yapmak istiyor. Gişe çalışanının bilet satışı başladığında hiç parası bulunmadığına göre bu çalışanın herhangi bir para üstü sorunu yaşamadan sıradaki 2n kişiye bilet satma olasılığı nedir? (İpucu: "Matematiğin Şaşırtan Yüzü" bölümüne bakınız.)

Geçen Ayın Çözümleri

Eşit Kenarlı Dörtgen

Soruda verildiği gibi DAB + ABC = 120° olduğuna göre BCD + CDA = 240° olur. Bu durumda PCB = 360 – BCD – 60 = 300 – (240 – CDA) = 60 + CDA = ADP'dir. Böylece PCB açısının ADP açısına eşit olduğunu bulduk. Kenar-açı-kenar özelliğinden ADP üçgeni ile BCP üçgenlerinin eşit üçgenler olduğunu artık söyleyebiliriz. O halde PA = PB ve APB açısı 60 derecedir. Bu da APB üçgeninin eşitkenar üçgen olduğunu kanıtlamaya yeterlidir.

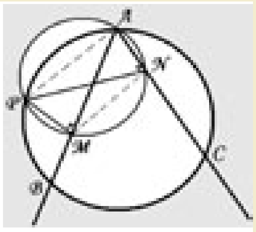


Alt Küme Toplamları

Çözüme ulaşabilmek için tümevarım yöntemini kullanacağız. n=1 için çözüm zaten geçerli ve çok açık. Şimdi (1,2,...,n-1) seti için sonucun n-1 olduğunu varsayalım. Yapmamız gereken bu sete n eklendiğinde, n sayısını içeren tüm kesirlerin toplamının 1 olduğunu kanıtlamak. n sayısını içeren tüm kesirlerin toplamı şöyle olur: (n-1)/n + 1/n =1. Toplamdaki ilk kısım, (1,2,...,n-1) setinin tüm kesirlerinin paydasına n eklenmesiyle oluşan kısımdır. Böylelikle tüm toplam (n-1) + 1 = n olur ve ispatımız tamamlanır.

Doğru Konum

M ve N noktalarındaki dik açı nedeniyle A, P, M, N noktalarından geçen Z çemberinin çapı AP'dir (şekil sizi aldatmasın). Dikkat ederseniz P noktası konum değiştirse de MAN açısı değişmeyecektir. Bu demek oluyor ki en büyük MN kiriş uzunluğu ancak en büyük Z çemberini elde ettiğimizde mümkün olur. En büyük Z çemberinde P noktası A noktasına en uzak noktada olmalıdır ve bu da aslında büyük çemberin çapıdır. Böyle bir durumda M noktası B ile, N noktası da C ile çakışır ve aradığımız maksimum MN uzunluğu BC'nin uzunluğu olur.



Garantili Bölme

Varsayalım ki s setinin hiçbir elemanı 2k+1 ile tam bölünmesin. Buna göre setin tüm elemanları mod 2k+1'de 1,2,...,2k değerlerinden birini alır. Bu durumda şu iki koşuldan biri geçerli olmak zorundadır: 1-) S setinin en az iki üyesi mod 2k+1'de aynı değeri verir(2^r – 1 = 2^s – 1(mod 2k+1) , r>s) veya 2-) her bir 1,2,3,...,2k değeri setin 2k tane elemanı ile mod 2k+1'de birebir eşlenir.

Birinci durumun gerçekleşmesi durumunda 2^r – 2^s = 0 mod(2k+1) ve $2^s(2^{r-s}$ – 1) = 0 mod(2k+1) olur. 2k+1 tek sayı olduğu için 2^{r-s} – 1 = 0 mod(2k+1) yazabiliriz. Fakat 2^{r-s} – 1, S setinin bir üyesidir ve böylece 2k+1'e bölünmüş olur. İkinci durumda ise S'in bir elemanı mod 2k+1'de 2k'ya eşit olması gerekir: 2^a – 1 = 2k mod(2k+1). Ancak 2^a = 2k+1 = 0 mod(2k+1) elde edilir ki bu açık bir çelişkidir. İki durumda da çelişkiyi yakaladığımıza göre ispatımız tamamlanmış olur.

Matematiğin Şaşırtan Yüzü

Koordinat Ekseninde Olasılık

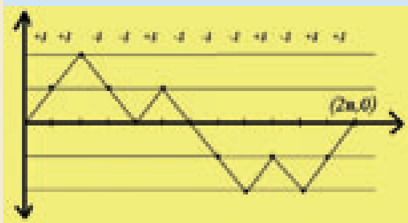
Sizden tanıdığınız ünlü matematikçileri bir listeye yazmanız istense eminim bir çoğunuzun listesinde en üst sıralarda yer alır Paul Erdös. Matematik dünyasına sayısız "seçkin" çalışmalar bırakan bu dahi matematikçinin ünü, biraz da ilginç yaşamından kaynaklanır. Ancak gelin bu ilginç yaşam öykusünü önümüzdeki sayılara bırakalım ve anlaşılması basit ama bir o kadar da ilginç olan Erdös'ün "seçkin" çalışmalarından birini sizlere aktaralım.

1946 yılında "Scripta Mathematica" kitabında Paul Erdös ve Irving Kaplansky imzasıyla yayınlanan bir soru o kadar dikkat çekti ki kısa zamanda aynı temel prensibe dayanan türlü sorular dergilerde ve kitaplarda boy göstermeye başladı. Bu ay Matematik Kulesi'nde sorduğumuz "Hayali Sıra" isimli soru da bunlardan bir tanesi.Herkeste büyük merak uyandıran Erdös ve Kaplansky'nin sorusu şöyle: Elimizde n tane +1 ve n tane –1 sayılarından oluşan rasgele sıralanmış 2n'lik bir dizi olsun. Sizin de rahatlıkla bulabileceğiniz gibi n tane +1 ve n tane –1 ile 2n'in n'li kombinasyonu kadar farklı dizi oluşturmak mümkün. Merak edilen, bu olası dizilerden kaç tanesinde sayılar soldan toplanarak ilerlendiğinde hiçbir zaman negatif bir kısmi toplam oluşmaz. Daha kolay anlayabilmek için n=2 alalım. Bu durumda aşağıdaki gibi 6 farklı dizi elde edebiliriz:

a) +1 +1 –1 –1 d) –1 +1 +1 –1
b) +1 –1 +1 –1 e) –1 +1 –1 +1
c) +1 –1 –1 +1 f) –1 –1 +1 +1

Dikkat ederseniz sadece a ve b şıklarındaki diziler soldan teker teker toplanarak ilerlendiğinde kısmi toplamı negatif bir değer olmaz. Bu yüzden n=2 için toplam 6 farklı diziden sadece 2 tanesi istediğimiz özelliğe uyar. Peki n için genelleme yaptığımızda sonuç nasıl değişir? Artık gerçek soruyla yüz yüzeyiz!

Bu soruyu alt edebilmeniz için önünüzde bir ay gibi uzun bir süreniz olacak çünkü ne yazık ki yer sıkıntısı nedeniyle çözümü öbür aya bırakacağız. Ancak çözüm çabalarınızı kolaylaştıracak bir yönteme de değinmeden geçmeyelim. Şekildeki gibi soru koordinat eksenine aktarıldığında detayları daha iyi görmek mümkün olabiliyor.



Orijinden başlayan ve her zaman (2n,0) noktasında biten grafiğimizde +1 sayısı bir birim yükselmeyi, -1 sayısı ise bir birim alçalmayı temsil ediyor. Bizden istenen koordinat ekseninin 4. bölgesine (x ekseni= +, y ekseni = –) geçmeyen tüm dizinlerin sayısını bulmak.