

KÜTLE MERKEZİ (SIFIR-MOMENTUM) ÇERÇEVESİ

Gülşen ÖNENGÜT*

Geçen sayıda, bir cismin birbirine göre sabit bir rölatif hızla hareket eden iki gözlem çerçevesindeki konum ve hızlarını birbirine bağlayan Galile dönüşümlerini anlatmış ve böyle iki çerçevenin fizik yasaları açısından eşdeğer olduğunu görmüştük. Örneklerle de göstermiştik ki, bir cismin momentumu, ölçümün yapıldığı gözlem çerçevesine bağlı olarak değişir. Her zaman için cismin momentumunun sıfır olduğu (yani cismin hareketsiz olduğu) bir gözlem çerçevesi seçebiliriz. Hareket eden birden fazla cisim varsa, bu cisimler sisteminin toplam momentumu yine gözlem çerçevesine bağlı olacaktır. Toplam momentumun sıfır olduğu bir gözlem çerçevesi bulmak her zaman mümkündür. Sıfır-momentum çerçevesi adı verilen bu çerçeve, pek çok durumda hesapları basitleştirir; ayrıca dinamik açısından bu çerçevenin önemi büyüktür. Bu yazıda, belli bir cisimler sistemi için sıfır-momentum çerçevesini nasıl bulacağımızı ve bu çerçevenin ilginç özelliklerini tartışacağız.

Laboratuvar gözlem çerçevesinde (S çerçevesi) x ekseninde v_1 ve v_2 hızları ile hareket eden m_1 ve m_2 kütleli iki cisimden oluşan bir mekanik sistemi düşünelim (Şekil 1). Basit olması nedeni ile sadece iki cisimli bir sistemin tek boyuttaki hareketi ele alınmıştır. Bulunacak sonuçların çok cisimli sistemlere ve iki veya üç boyuttaki hareketlere genelleştirilmesi mümkündür.

S çerçevesine göre v hızı ile hareket eden bir S' çerçevesinde m_1 ve m_2 'nin hızları sırası ile v_1' ve v_2' toplam momentum ise, $m_1v_1' + m_2v_2'$ olacaktır. Bu toplam momentumun sıfır olması için S' çerçevesinin S ye göre v rölatif hızının ne olması gerektiğini araştıracağız. Hızlara Galile dönüşümünü uygulayarak,

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - v \\ v_2' &= v_2 - v \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısı ile S' çerçevesinde toplam momentum, p'

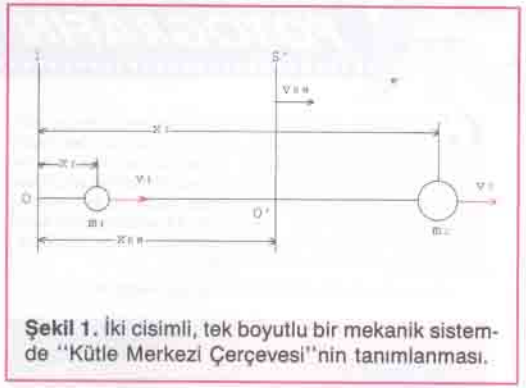
$$p' = m_1v_1' + m_2v_2' = m_1(v_1 - v) + m_2(v_2 - v)$$

bunu sıfır yapan v değeri ise,

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

olarak bulunur. S ye göre yukarıda verilen hızla hareket eden S' çerçevesine sıfır-momentum çerçevesi adı verilir; çünkü bu çerçevede mekanik sistemin toplam momentumu sıfırdır.

* Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü.



Şekil 1. İki cisimli, tek boyutlu bir mekanik sistemde "Kütle Merkezi Çerçevesi"nin tanımlanması.

S' çerçevesinin O' orijininin S çerçevesindeki konumu x ise,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (v_1 = \frac{dx_1}{dt}, v_2 = \frac{dx_2}{dt})$$

bağıntısından

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + K$$

olarak bulunur. Burada K, aldığımız $x = \int v dt$ integrali sonucunda ortaya çıkan integral sabitidir. Bu sabiti sıfır olarak seçersek, bulacağımız nokta m_1 ve m_2 kütlelerinin oluşturduğu iki-cisimli sistemin **kütle merkezi (KM)** dir:

$$x = x_{KM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

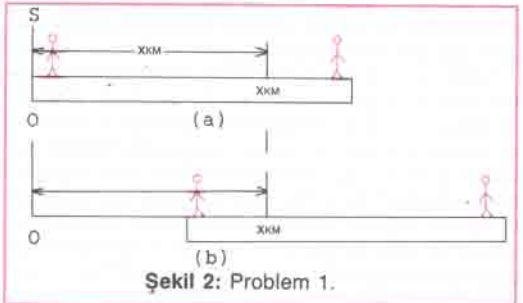
Yani S' gözlem çerçevesinin (sıfır-momentum çerçevesi) orijini (O), iki-cisim sisteminin kütle merkezidir. S ye göre de

$$v = v_{KM} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

hızı ile hareket etmektedir. Sıfır-momentum çerçevesine **kütle merkezi çerçevesi** adı da verilir. Sistemin toplam kütlelerini $M = m_1 + m_2$, S çerçevesindeki toplam momentumunu $P = m_1v_1 + m_2v_2$ olarak tanımlarsak,

$$v_{KM} = P/M$$

elde ederiz. Eğer dış kuvvetler etki etmiyorsa, sistemin toplam momentumu sabit kalacak; dolayısı ile kütle merkezinin hızı değişmeyecektir. Aşağıdaki problem bu noktaya dikkat çeken güzel bir örnektir.



Şekil 2: Problem 1.

PROBLEM 1: 80 kg kütleli bir adam ile 20 kg kütleli çocuk, kütlesi ihmal edilebilen, 2 m uzunluğundaki bir kalasın iki ucunda şekil 2a da gösterildiği gibi durmaktadır. Kalas, buzun üstündedir ($\mu = 0$). Adam ve çocuk yer değiştirirse kalas ne kadar hareket eder?

ÇÖZÜM: Laboratuvarında sabit S sisteminin 0 orijinini şekil 2'de gösterildiği gibi, başlangıçta kalasın çocuğun durduğu ucunda seçerek, adam ve çocuktan oluşan sistemin kütle merkezinin x koordinatını hesaplayalım:

$$x_{KM} = \frac{80 \times 2}{20 + 80} = 1.6 \text{ m}$$

Bu sistemin üzerine yatay doğrultuda etki eden kuvvet olmadığı için kütle merkezinin hızı sabit kalacaktır; yani hep başlangıçtaki sıfır değerini koruyacaktır. Buradan kütle merkezinin hep aynı noktada kalacağı sonucu çıkar. Bunu sağlamak için, adama çocuk yer değiştirmek üzere yürümeye başladıklarında kalas sağa doğru kayar. Yer değiştirme işlemi tamamlandığında kalas şekil 2b de gösterilen konumu almıştır. Yani $1.6 - 0.4 = 1.2 \text{ m}$ sağa doğru kaymıştır.

Eğer sistemin üstüne etki eden dış kuvvetler sıfır değilse, kütle merkezi sisteminin ivmesini aşağıdaki bağıntıdan hesaplayabiliriz:

$$a_{KM} = \frac{dv_{KM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dP}{dt} = \frac{F_{dış}}{M}$$

Yerçekimi alanının düzgün (yani her noktada aynı) olduğu durumlarda yukarıda tanımlanan kütle merkezi, ağırlık merkezi ile çakışır. Bir cisimler sisteminin **ağırlık merkezi**, bu cisimlere etki eden yerçekimi kuvvetlerinin yerine geçtiğinde, etkisi bu kuvvetlerinkine eşdeğer olacak tek bir kuvvetin etki ettiği noktadır. Yukarıdaki iki cisim sistemini düşüdüğümüzde, bu kuvvet ($m_1g + m_2g$) ye eşit olmalıdır. Burada g yerçekimi ivmesidir; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Bu kuvvetin hangi x noktasına etki etmesi gerektiğini bulmak için dönme etkisini, yani uygulayacağı torku düşünmemiz gerekir. Bu tork m_1g ve m_2g kuvvetlerinin herhangi bir noktaya (örneğin S çerçevesinin 0 orijinine) göre torklarının toplamına eşit olmalıdır (Şekil 3):

$$-m_1gx_1 + m_2gx_2 = g(m_1x_1 + m_2x_2) = (m_1g + m_2g)x$$

Buradan ağırlık merkezinin x koordinatını çözebiliriz:

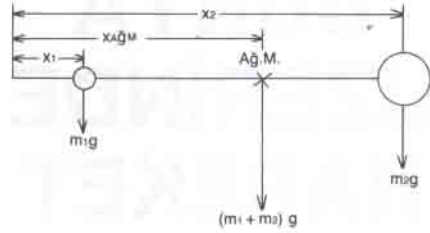
$$x = x_{Ağ.M.} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Görülüyor ki, g yerçekimi ivmesinin sabit olduğu bu durumda ağırlık ve kütle merkezleri aynı noktadadır. Eğer x_1 ve x_2 noktalarındaki yerçekimi ivmeleri farklı olsaydı bu doğru olmayacaktı.

Şimdi de yukarıda bahsettiğimiz iki-cisimli sistemin sıfır-momentum veya kütle merkezi çerçevesindeki dinamiğini inceleyeceğiz. Önce S çerçevesindeki (bu çerçeveyi laboratuvar çerçevesi olarak düşünebiliriz) toplam kinetik enerjisi v_1' , v_2' ve v_{KM} cinsinden yazalım:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1' + v_{KM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2' + v_{KM})^2$$



Şekil 3. Tek boyuttaki iki-cisimli bir sistemin ağırlık merkezinin belirlenmesi.

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) + (m_1 v_1' + m_2 v_2') v_{KM} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{KM}^2$$

Bu ifadede ortadaki terim, sıfır-momentum çerçevesinin tanımı nedeni ile sıfırdır:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$$

İlk terim iki-cisim sisteminin kütle merkezi çerçevesindeki K' kinetik enerjisidir. Son terim ise, kütle toplam kütleyle eşit ve kütle merkezi çerçevesinin hızı ile hareket eden tek bir cismin kinetik enerjisidir. Sonuç şu şekilde ifade edilebilir:

$$K = K' + \frac{1}{2} M v_{KM}^2$$

Bu ifadede görülen ilk terime **İç kinetik enerji** adı da verilir. Kinetik enerjinin bu şekilde iki terime ayrılması, sadece sıfır-momentum çerçevesinde mümkündür. Bu nedenle bu çerçevenin önemi büyüktür. Bir cisimler sisteminin hareketinin analizinde büyük kolaylık sağlar. Dış kuvvetler etki etmiyorsa v_{KM} , dolayısı ile ikinci terim sabittir. Kinetik enerjinin belirli bir kısmı bu terimde hapsolmüştür. Sistemin iç hareketi (kütle merkezine göre hareket) için kullanılamaz. Örneğin, bir çarpışmada ilk kinetik enerjinin sadece K' kadar başka enerji türlerine çevrilebilir. K' iç kinetik enerjisini başka şekilde de ifade edebiliriz:

$$K' = K - \frac{1}{2} M v_{KM}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2$$

Bu ifadeden görüldüğü ki, K' , $v_1 - v_2$ rölatif hızı ile hareket eden $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ kütleli bir cismin kine-

tik enerjisine eşittir. μ ya **İndirgenmiş kütle** adı verilir. μ ve $v_{röl} = v_1 - v_2$ yi kullanarak K nü şöyle yazabiliriz:

$$K' = \frac{1}{2} \mu v_{röl}^2$$

Bir dahaki sayıda, bu yazıda öğrendiğimiz kavramlara açıklık getirecek örnek problemler çözülecektir.

(Devam edecek.)

Bu yazı dizisinin hazırlanmasında yararlanan kaynak listesi, dizinin son makalesinde verilecektir.