AĞAÇLAR, TELEFONLAR VE KİREMİTLER

Bir telefon firması ilçeden ilçeye en ekonomik şekilde nasıl kablo döşeyebilir? Matematikçilerin basit bir yanıtı var; fakat bu yanıtın doğruluğunu göstermek oldukça karmaşıktır.

Ian STEWART

Bütçesi kısıtlı olan yeni bir firma, İngiltere'de Loughborough, Stroke-on Trent ve Rotherham kasabaları arasında kablo döşemeyi üstlenmiştir. Ancak firmanın iki tecrübeli menejeri Miles Spanning ve Heratio Steiner, bunun nasıl yapılacağı konusunda anlaşamıyorlar. İki nokta arasında en kısa yolun düz hat olması nedeniyle Spanning, yapılabilecek en iyi şeyin, ilçelerden birinin seçilip diğerlerine düz hat üzerinden bağlanması olduğunu savunuyor. İlk kasabanın seçimi, aralarındaki gerçek uzaklıklara bağlı ve oldukça basittir. Üç kasabanın oluşturduğu üçgenin en uzun kenarı iptal edilip, diğer iki kenar boyunca kablo döşenir. Steiner bunları anlamıştır fakat, şebekeye bir kasaba daha eklenmesi halinde daha az kablo kullanılacağını düşünmektedir. Fakat nasıl olur, şebekeye bir kasaba daha eklenmesi daha fazla kablo kullanılmasını gerektirmez mi? Belki bu durum dördüncü kasabanın yerine bağlıdır. Dördüncü kasabanın varlığı halinde döşenecek kablodan gerçekten kâr edilebilir mi? Edilirse, ne kadar kâr edilir?

Söz konusu üç kasaba, birbirinden 75 km uzaktadır. Yani kenarları 75'er km olan eşkenar üçgenin köşelerinde bulunurlar. Bu durumda Spanning'in görüşüne göre başlangıç olarak hangi kasaba seçilirse seçilsin bağlantı şebekesi için 150 km'lik kablo kullanılacaktır. Üç kasabanın oluşturduğu eşkenar üçgenin tam ortasında Middleton kasabası vardır. Middleton diğer kasabalardan aşağı yukarı 44'er km uzaklıktadır. Steiner'e göre, şebekenin merkezi bu 4. kasaba seçilip buradan diğer kasabalara bağlantı yapılırsa, 3x44 = 132 km'lik kablo kullanılmış olacak. Dolayısı ile kablodan 18 km, yani % 12 kâr edilecektir.

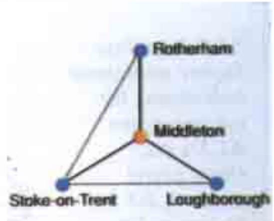
İlginç değil mi? Pratikte yerleşim merkezleri sayısı ve düzeni ne olursa olsun bu yöntem uygulanarak, yerleşim merkezleri arasına kablo döşenmesinde hem malzemeden hem de emekten önemli kârlar sağlanmaktadır. Bell Laboratuvarlarında çalışan Egar Gilbert ve Henry Pollak, 1968 yılında, bu yöntemle malzemede elde edilebilecek maksimum kârın % 13,34 olacağını açıkladılar. Bu bulgu, "Steiner oran bulgusu" olarak bilinmektedir.

23 senelik gayretli bir çalışmadan sonra Princeton Üniversitesi'nden Ding Zhu Du ve Bell Laboratuvarlarından Frank Hwang, teorinin doğru olduğunu kanıtladılar. Matematiksel formulasyonunda bağlanacak ilçeler, bir düzlemdeki noktalar ve onları bağlayan kablolar doğru çizgiler olarak temsil edilmişlerdir. Kablo bağlantılarının, hiçbir düğümü olmayan bir şebeke oluşturmak zorunda olduğu açıktır. Başka bir yoldan zaten birleştirilmiş olan ilçeleri yeniden birleştirmek anlamına gelen düğümler, sadece kablo israfına yolaçarlar.

Eğer yeni ilçeler içerilmiyorsa, böyle bir şebeke "Spanning ağacı" olarak adlandırılır. Seçmek için birçok "Spanning ağacı" vardır; ama prensipte hepsi listelenip hangisinin en kısa olduğu görülebilir. Örneğin dört tane ilçe olduğunu farzedin: Aylesbury, Brighton, Clacton ve Dogenham. Şekil 2, mümkün olan bazı "spanning ağaçları"nı ve uzunluklarını göstermektedir. En kısa olanı Dogenham'i merkez alıp, bundan diğer üç ilçeye ayrı ayrı bağlantı oluşturulandır. Diğer taraftan eğer ilçeler, hemen hemen doğru bir çizgiye yerleşmiş olan Ashburton, Bristol, Cheltenham ve Daventry ise, en kısa "Spanning ağacı" onları o doğrultuda birleştiren bağlantıdır ve hiçbir merkez noktasına sahip değildir.

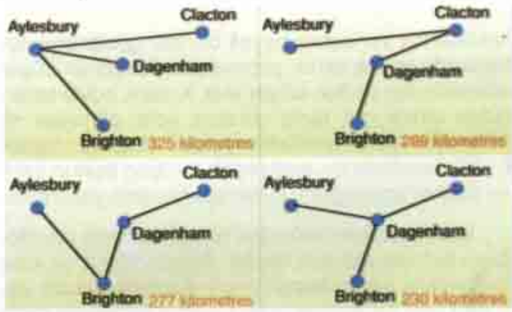
Bağlantıların yerleşim merkezleri dışında oluşturulmasına izin verilirse, problem daha da önem kazanır. Örneğin, başlangıç örneğimizdeki Rotherham, Loughborough ve Stroke-on Trent gibi eşkenar üçgenin köşelerinde üç ilçe varsa, en kısa şebeke tüm üçünü üçgenin merkezinde Middleton'da veya Middleton dışında, ondan fazla uzakta olmayan açık arazide bir yerde birleştiren şebekedir. Böyle şebekelerin en kısaları da bir ağ oluşturur olmalıdır. Bu ağlar, "Steiner ağacı" olarak adlandırılır. Genelde bir "Steiner ağacı", kenarları ya orijinal ilçelerde ya da çizgiler arasındaki açıları 120 derece olacak şekilde yeni ilçelerde buluşan bir ağaçtır. Orijinal kasabaları bağlayan ve mümkün olan kasabaları da içeren en kısa ağaç, her zaman bir Steiner ağacıdır; bundan dolayı en kısa ağaç arayışı Steiner ağaçlarıyla sınırlandırılabilir. Ancak genelde farklı uzunluklarda birçok Steiner ağacı bulunmaktadır.

Üçten fazla ilçeyi birleştirmede Steiner ağacı kullanma problemi, ciddi olarak ilk kez Milos Kossler ve Vojitech Jarnik tarafından 1934'te araştırılmıştı. Herhangi bir örnekte en kısa Steiner ağacını bulmak, en kısa birleştirme ağacını bulmaktan çok daha karışık bir hesaplama gerektirmektedir. Çünkü birçok yeni Steiner noktalarının hesaba katılması gerekmektedir. Örneğin, Şekil 4'teki gibi iki bitişik karenin köşelerine yerleşmiş altı tane ilçe olduğunu varsayın. Mümkün bir Steiner ağacı, Şekil 4a'da gösterilmiştir: Bu problemin önce 4 ilçeden oluşan bir kare için çözülüp, sonra kalan ikisinin Steiner noktaları düşünülerek diğerlerine bağlanmasıyla bulunmuştur. Buna rağmen en kısa Steiner ağacı, Şekil 4b'de gösterilmiş olandır. Mümkün olan en kısa Steiner ağacını parça parça düşünerek oluşturamazsınız.



Bir ilçe eklenmesiyle kablo tasarrufu (sağda). Noktalı şebeke 150 km uzunluğunda, koyu çizgiyle gösterilen sadece 132 km (yanda).

Dört İngiliz ilçesi için 16 olası Spanning ağacının dördü (aşağıda). En altta sağdaki tüm 16'nın içinde en kısa olanı.



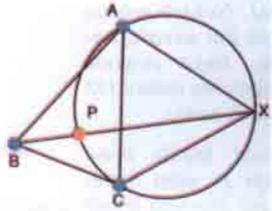
Canlı organizmaların genetik materyali, gelişme bilgilerinin kodlandığı adenin, timin, sitozin ve guanin dizilerinin oluşturduğu DNA'dır. Bu planda genetik bilgiler AATTCGCTCA... gibi uzun dizilerle belirlenir. Steiner ağaçları uygulamasında "ilçeler" değişik organizmalardaki DNA dizileridir ve "uzaklık" farklı diziler arasında bir benzerlik ölçüsüdür. Steiner noktaları "en olası ortak atalar" a karşı gelir. Bu ortak ataların varolmuş olabileceği konusunda bir garanti olmasa da yöntem DNA molekülünün nasıl değişmiş olabileceği ve organizmaların genetik olarak nasıl birbiriyle ilişkili oldukları hakkında ilginç ipuçları vermektedir.

DAHA KISA DEVRELER GÜNDEMDE

Steiner ağaçlarına benzer olan bazı başka problemler doğada oluşum içindedir. Örneğin, elektronik devrelerin tasarılarında bağlantılar genellikle dikdörtgen bir ızgaraya sadece yatay ve düşey olarak yayılmışlardır. Burada diğer uygulamalardaki aynı türden sorular sorulabilir ve problemin çözümüne benzer yöntemler yardımcı olabilir.

Steiner orantı bulgusu, benzer bütün şebekeler için ekonomik yönden önemlidir; çünkü en kısa birleştirme ağacını bulmak en kısa Steiner ağacını bulmaktan daha kolaydır ve bizi % 13,34'lük yanılgıyı saptama çabasından kurtarır. Steiner orantı bulgusunun ortaya konduğu laboratuvarlara sahip olan AT&T'nin bir telefon şirketi olması tesadüf değildir. Son zamanlara kadar AT&T şirketi, büroları arasında bağlantı kurmak isteyen müşterilerinin isteklerini yerine getirmede birleştirme uzunluğunu uygun bir yol olarak kullanıyordu. Ancak şirketin Steiner

ABC üçgeninin Steiner noktasının bulunması. Bir eşkenar üçgen ACX'i çiz. Onun çevrel çemberi, BX'i Steiner noktası P'de keser.



noktalarına yerleşmiş hayalî bürolar göstererek faturalarda büyük kârlar yapmış olabileceğinin düşünülmesinden endişe ediyorlardı. Kuram, böyle tasarrufları şirket için fazla rahatsız edici olmayan % 13,34'lük kârla sınırlandırıyordu. Prensip olarak AT&T, kendisini bu endişeden kurtarıp bunun yerine Steiner uzunluğunu kullanabilirdi; ama yapamadı.

İlçe sayısı çok fazla olsa bile birleştirme uzunluğunu bulmak oldukça basitti. Bulabildiğiniz en kısa bağlantıyla başka kapalı ilmek oluşturmayacak şekilde kalan bağlantıların en kısasını şebekeye dahil ederek bu işe tüm ilçeler ağaca dahil oluncaya kadar devam edin (Bu algoritma, yanıt vermesi garantili olan özel bir hesaplama işlemidir).

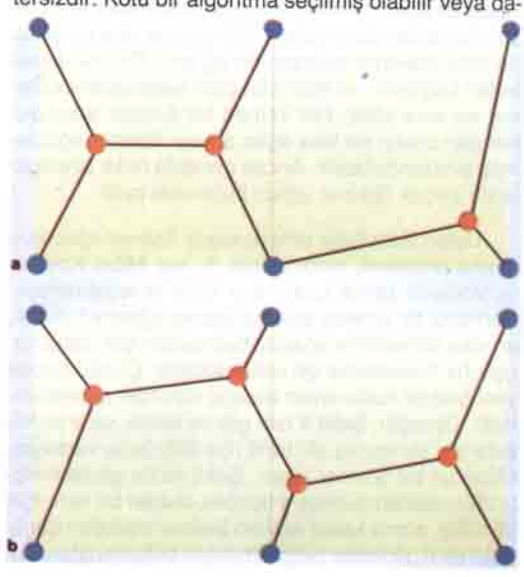
En kısa Steiner ağacını bulmak bu kadar kolay değildir. Bunu sadece mümkün olan ilçe üçlülerini alıp onların Steiner noktalarını bularak sonra da ilçeleri birbirine bağlayan, ilçelerde ya da Steiner noktalarında kesişen en kısa ağacı arayarak yapamazsınız. Örneğin bir kare içinde dört ilçe olsun (Şekil 5). İlçe üçlüleri için Steiner noktaları köşelere yakın alınsın (Şekildeki gölgeli yuvarlak ve diğer köşelere yakın olan üç nokta). Fakat beyaz noktalarla gösterilmiş iki yeni ilçe kullanan başka bir Steiner ağacı vardır. Beyaz noktalar herhangi üç ilçenin Steiner noktaları değildir. Dahası beyaz noktaları kullanan ağacın en kısa ağaç olduğu ispatlanabilir. "Steiner noktası" deyiminin anlamı üçten fazla ilçe için oldukça karışıktır.

Bu daha karışık durumda çoğu noktalar Steiner noktaları değildir; ancak hangilerinin hangileri olduğuna karar vermek de kolay değil. Düzlemde sonsuz sayıda nokta vardır ve sonlu bir algoritma, onları tek tek kontrol edemez. Aslında böyle algoritmalar vardır ve ilki British Columbia Üniversitesi'nden Z.A. Melzak tarafından oluşturulmuştur. Fakat Melzak'ın yöntemi henüz ilçe sayısı çok fazla olmadan kullanışsız hale gelir. Bu yöntemin sonradan tasarlanan gelişmiş versiyonları da daha iyi değildir.

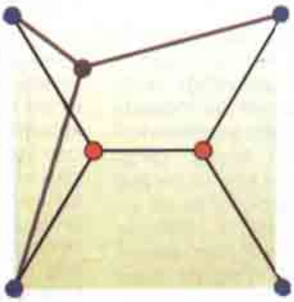
Şimdi bu çözümlerin yetersiz olduklarını gösteren nedenlerin bulunduğunu iyi biliyoruz. Bilgisayarların genişleyen kullanımı sadece algoritmayı değil, bu algoritmaların ne kadar yeterli olduklarını da araştıran karmaşıklık kuramı adında yeni bir matematik branşının gelişmesine neden olmuştur. Herhangi bir n sayıda nesne (burada ilçeler) içeren bir problem verilse, n büyüdükçe "çözümü bulma" süresi ne kadar büyür? Eğer çözüm süresi 5 n^2 veya $1066n^4$ gibi n'in belli kuvveti çarpı bir sabitten daha hızlı artmıyorsa, algoritmanın "polinom zamanıyla" çalıştığı söylenir ve problem de "kolay" olarak bilinir. Genellikle bunun anlamı algoritmanın kullanılabilir olmasıdır. Sabitin değeri oldukça büyükse algoritma kullanışsız olabilir. Eğer çözüm süresi n'in kuvvetlerinin herhangi bir sabitle çarpımından daha hızlı artıyorsa - örneğin 2^n veya 10^n gibi üstel olarak - polinom olmayan çözüm süresine sahip olduğu ve "zor" olduğu söylenir. Genellikle bunun anlamı algoritmanın tamamen kullanışsız olmasıdır. "Polinom zamanı"yla "üstel zaman" arasında kullanışlılığın daha çok tecrübeye dayalı olduğu "oldukça kolay" veya "orta zor" problemler vardır.

Örneğin n rakamlı iki sayıyı toplamak en fazla 2n rakamlı toplama işlemi gerektirir ve gerekli zaman 2 ile n'in birinci kuvvetinin çarpımıyla sınırlanmıştır. Böyle iki sayının çarpımı ise, n^2 tane tek basamaklı çarpma işlemi, $2n^2$ den daha az sayıda toplama ve basamaklar üzerinde toplam $3n^2$ tane işlem gerektirir. Bu nedenle okul çocukları ne düşünürse düşünsün bu problemler "kolay"dır. Şimdi de belli sayıda il arasında dolaşan ve en kısa yolu bulmayı amaçlayan pazarlamacı problemini düşünelim. Eğer n tane il varsa dikkate alınacak yol sayısı n veya $nx(n-1)\ (n-2)...3 \times 2 \times 1$ şeklindedir ve bu sayı n'in herhangi bir kuvvetinden daha hızlı artım gösterir. Farklı durumları tek tek ele almak bu nedenle işe yaramaz.

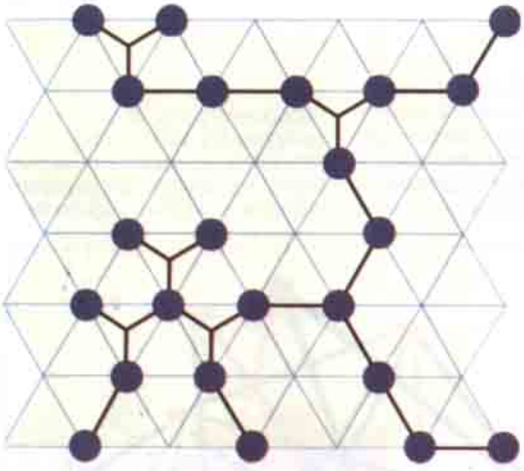
Tuhaf olan, karmaşıklık kuramında öznenin gerçekten varlığının nasıl ispatlanacağının büyük problem olmasıdır. Zorluk, basit bir problemin ispatının da zor olduğunun gösterilmesindedir. Bir problemin kolay olduğunu göstermek için onu polinomsal zamanda çözen tek bir algoritma ortaya koyarsınız. Onun için en iyi veya en akıllıca olmasına gerek yoktur; herhangi biri olabilir. Fakat bir problemin zor olduğunu kanıtlamak için bir algoritma göstermek yetersizdir. Kötü bir algoritma seçilmiş olabilir veya da-



ha iyi işleyen başka bir algoritma var olabilir. Problem için mümkün bütün algoritmaları göz önüne almak için matematiksel bir yol bulmak ve bunların hiçbirinin polinomsal zamanda işlemediğini göstermek zorundasınız.



Eşkenar üçgen örneği kuram için basit bir kanıt olması gerektiğini gösterir. Ancak onun basitliği aldatıcı olabilir. Çünkü Steiner orantı kuramının basit bir kanıtı olsa bile şimdiye kadar hiç kimse bulamamıştır. Hatta Du-Hwang'ın ispatı bile aldatıcı olabilir. Gilbert ve Pollak, Steiner oranının her zaman en az 0,5 olduğunu kanıtladılar. 1990'a kadar birçok kişi dört, beş ve altı ilçeden oluşan şebeke kuramını tamamen doğrulamak için bir yığın hesaplamalar yaptı. Hatta, istediğiniz kadar çok sayıda ilçenin genel organizasyonu için Steiner oranını 0,5 ten 0,57, 0,74 ve 0,8'e kadar zorladılar. Kısa bir süre önce Bell Communications Research'tan Graham ve Fang Chung bu oranı 0,824'e çıkardı; fakat sonradan yaptıkları hesabı "yanlış yaklaşım" olarak tanımladılar.



Daha fazla ilerlemeyi mümkün kılmak için bu korkunç hesaplamalar basitleştirilmek zorundadır. Du ve Hwang, korkunç hesaplamaların tamamen dışında bir yaklaşım buldular. Temel soru, eşkenar üçgenlerin nasıl devreye sokulabileceğidir. Orantının sınırlarını oluşturan üçgen örneğiyle aynı orantı sınırına uyması beklenen ilçelerin genel bir sistemi arasında büyük bir boşluk vardır. Bir düzlemde eşit eşkenar üçgenler halinde üçgensel kafes deseninde kiremitler döşendiğini farzedin (Şekil 6). İlçeleri sadece kiremitlerin köşelerine koyun. Ele alınması gereken Steiner noktalarının kiremitlerin merkezinde oldukları ortaya çıkar. Kısaca, sadece hesaplamalarda değil, teorik analizlerde de çok sayıda kontrol vardır.

Elbette her ilçeler takımı, üçgensel kafes biçimi oluşturmaz. Du ve Hwang'ın görüşlerine göre en azından bazıları üçgen köşelerinde olmalıdır. Kuramın yanlış olduğunu farzedin. Öyleyse bir zıt örnek olmak zorundadır: Bazı ilçe takımları için oran $\sqrt{3}/2$ den küçük olmalı. Eğer bir zıt örnek varsa, bütün ilçelerin üçgensel bir kafes oluşturduğu bir ilçe takımı da olması gerekir. Öncelikle kuram "minimax" problemi olarak tekrar formüle edilir. Böyle problemler oyun kuramında ortaya çıkar. Burada oyuncular yarışırlar ve rakipleri tarafından elde edilen kazançları sınırlamaya (minimize etmeye) çalışırlar. Oyun kuramı, ilk kez John von Neuman ve Oskar Morgenstern tarafından 1947'de keşfedilmiştir. Steiner orantı kuramının Du-Hwang versiyonunda bir oyuncu, Steiner ağacının genel şeklini seçer; diğeri de o şeklin bulabildiği en kısasını seçer.

Bu yeni yöntem önceden başedilmesi zor gözüken bir soruyu net olarak düzenler ve hesaplamaları oldukça kısaltarak temiz, basit bir çözüm verir. Du-Hwang yöntemi kolay değildir ve belli bir miktarda matematik tekniği gerektirir; ancak öyle dramatik bir gelişmedir ki, tüm geçmiş yaklaşımlardan üstündür. Daha önemlisi, benzer soruları araştırmak için bir örnek sunar. Problemi oyun kuramı terimleri cinsinden formüle eder ve daha az olabilirlikli bir probleme indirgeyerek çözüme ulaşır. "Önce düşün, sonra hesapla" atasözü her matematikçinin kalbine işlenmelidir.

New Scientist 16 Kasım 1991'den çev.:
Özgün DEMİRCAN

Duymak istemeyen kadar kötü sağır yoktur.
İtalyan atasözü

Akılsızca bir şeyi milyonlarca kişi de söylese, o şey yine akılsızcadır.
B. Russell