Soyut Cebirler ve Fizikte Simetri Yasaları*

Tekin DERELİ
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü

Geçen Nisan ayı içerisinde yitirdiğimiz Feza Gürsey, yüksek fizik ve matematik dehasının ürünü olan buluşları ve her yönden zengin kişiliği ile sadece Türk fizikçileri arasında değil dünya fizikçileri arasında da pek iyi tanınmakta ve takdir edilmekteydi. Onun gelmiş geçmiş en büyük Türk bilginlerinden birisi olduğunu söylemek bir abartma değildir. Feza Gürsey maddenin yapıtaşları olarak tanımlanan temel parçacıkların simetrileri ve bunları birarada tutan kuvvetlerin dinamiğini veren büyük birleştirme teorileri konularında çığır açan eserleriyle fizik dünyasında büyük bir ün yapmıştır. 1950'den bu yana yayınladığı toplam yüzden fazla makalesinin her birisinde yeni bir buluş, bizlere yeni bir bakış açısı sunmuştur. Eminiz ki bu eserleri daha uzun yıllar bilim adamlarınca incelenecek ve Feza Gürsey adı Türk biliminin yüz akı olarak anılacaktır. Bugün Türkiye'de araştırmalar yapıp yayınlayan hatırı sayılır sayıda çok teorik fizikçinin var olmasında Feza Gürsey'in emeği büyüktür. Feza Gürsey'den ders almış, onun yanında yetişmiş fizikçilerden birisi olmak benim için her zaman bir övünç nedeni olmuştur.

Feza Gürsey istatistiksel fizikten kuantum mekaniğine, temel parçacıklar fiziğinden Einstein'ın relativite teorisine dek çağdaş fiziği oluşturan aşağı yukarı bütün konularda önemli çalışmalar yapmış olağanüstü bir bilim adamıydı. Üzerinde yayın yapmış olduğu konuların bir listesine bakmak bile araştırmalarının kapsamı hakkında fikir vermeğe yeterlidir: Özel relativite teorisinde kuaterniyonlar, spinli elektronların klâsik ve kuantum mekaniği, konformal alan denklemleri, Mach ilkesi ve genel relativite teorisi, sabit eğrilikli de Sitter uzayları, iki bileşenli nötrino teorileri ve nötrino tür salınımları, Pauli-Gürsey dönüşümleri ve parçacık fiziğinde kiral modeller, kuarkların SU(6) simetrisi, oktoniyonik kuantum mekaniği, istisnai Lie cebirleri ve büyük birleştirme modelleri, ayar teorilerinde instantonlar ve kuaterniyon analitikliği. Feza Gürsey'in diğer öncü fizikçilerden bile hep bir adım ilerde kalmasını sağlayan şey, şaşılası bir önsezi ile soyut cebirlerin ve bunların simetrilerinin fizikteki önemini önceden kestirebilmiş olmasıydı. Bilim adamının büyüklüğünün önemli bir ölçüsü de bu değil midir?

* *15 Mayıs 1992 günü Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Fizik Araştırma Topluluğu (FİZART) öğrencilerine büyük Türk bilgini **Feza Gürsey**'i tanıtmak için yapılan konuşmanın genişletilmiş metnidir.*

Bu sayımızdan itibaren geçen yıl kaybettiğimiz büyük fizikçimiz Prof.Dr. Feza Gürsey'in bilime katkılarını anlatan yazılar yayınlayacağız. Bu yazılar, Feza Bey'le birlikte çalışmış eski öğrencileri ve arkadaşları tarafından yazıldı. Yazılar, konuları gerçekten tasvir edebilmek için, Bilim ve Teknik dergisinin alışılmış düzeyinden farklı, daha teknik ve matematiksel içerikli olacak. Bunları okuyucularımızdan üniversite fizik ve matematik öğrenimi görenleri hedefleyerek yayınlıyoruz.

Soyut sayılar denince bildiğimiz reel sayılar ile kompleks sayıları genelleyen diğer sayı sistemlerini anlamaktayız. Reel sayıların klasik fizikteki yerini anlatmamıza gerek yok. Klâsik fizikte herhangi bir ölçüm sürecinin sonucu bir reel sayı ile verilir. Kompleks sayılar ise kuantum fiziğinin temelinde yer alırlar. Kuantum mekaniğinde bir taneciğin zaman içerisinde uzayda hareketini belirleyen dalga fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyondur. Normalleştirilmiş bir dalga fonksiyonunun mutlak değer karesi, dalga fonksiyonu ile tarif edilen taneciğin belli bir anda belli bir yerde bulunması olasılığına eşittir. Bu iki sayı sistemini genelleyen sayı sistemleri ise ilk bakışta sanılacağı kadar çok değildir. Bir sayının sıfırdan farklı bir başka sayıya bölünebildiği sayı cebirleri sadece reel, kompleks, kuaterniyonik ve oktoniyonik sayı cebirlerinden ibarettir. a,b,... reel sayılar olsun. Tipik bir kompleks sayı a + ib ile gösterilir. Burada $i^2 = -1$ eşitliğini sağlayan bir sanal birim sayı tanımlanmıştır. Bir kuaterniyonu tanımlamak için birbirinden bağımsız üç tane sanal birim sayıya gerek vardır. Bunları i,j,k ile gösterelim ve

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

şartlarını sağlasınlar. Böylece tipik bir kuaterniyon

$$q = a + ib + jc + kd$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi iki kuaterniyon yukarıdaki kurallar yardımıyla çarpılır. Bu tanımdan kolayca görüleceği üzere iki kuaterniyonun çarpımı komütatif değildir. Yani çarpım sırasını değiştirince genelde sonuç değişir. Ancak kuaterniyon çarpımı asosiyatiftir. Yani herhangi üç kuaterniyonu belli bir sırada çarparken, hangi iki tânesinin önce çarpıldığı sonucu etkilemez. Verilen bir kuaterniyonun eşleniği aynen kompleks eşlenik alır gibi alınır: $\bar{q} = a - ib - jc - kd$. Böylece bir kuaterniyonun skalar kısmı $Sc(q) = \frac{1}{2}(q + \bar{q})$ ile vektör kısmı $Vec(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q})$ ayrılabilir. Bir saf kuaterniyon $Sc(q) = 0$ şartıyla tanımlanır ve üç boyutlu uzayda bir vektöre özdeştir. Bu nedenle bugün bile derslerde Kartezyen birim vektörlerini i,j,k simgeleriyle göstermek alışkanlığı sürmektedir. Bir kuaterniyonun normu (yani büyüklüğü) $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q$ ifadesiyle belirlenir. Normu bire eşit olan kuaterniyonlar birim kuaterniyon diye adlandırılırlar. Eğer q kuaterniyonunun normu sıfırdan farklı ise $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$ ile q'nun tersi verilir. Her kuaterniyonu başka bir kuaterniyona götüren bir $q \rightarrow q'$ gönderimi düşünelim. Eğer bu gönderim bire bir örten bir gönderimse, bu tür bir gönderime cebir otomorfizmi adı verilir. Cebir otomofizmleri grup aksiyomlarını sağlarlar. Böylece bir cebirin otomorfizm grubu tanımlanır. Kuaterniyon normunu koruyan otomorfizimler, p bir saf birim kuaterniyonu göstermek üzere, $q \rightarrow p' = pq\bar{p}$ ifadesiyle verilirler. Bu tanımlardan hareket ederek uzun fakat zor olmayan bir hesap sonucunda birim saf kuaterniyonların uzayda bir vektörün dönmesini sağladıkları gösterilebilir.

Kuaterniyonların oluşturduğu cebiri İrlanda'lı matematikçi W.R.Hamilton buldu. Bu buluşun hoş bir hikayesi vardır. Hamilton 16 Ekim 1843 günü Dublin'de akşam yürüyüşü sırasında uzun süredir zihnini uğraştıran sorulara kuaterniyonlarla yanıt getirebildiğini fark edivermiş. Bu coşku ile çakısını çıkararak bir kuaterniyonun o sırada aklına gelen tanımını üzerinde bulunduğu köprünün korkuluğuna kazımış. Hikaye ne kadar doğru bilemeyiz. Ancak bu anının korunmakta olup Dublin'deki köprünün hâlâ ziyaret ediliyor olmasını batı toplumlarında bilime ve bilim adamlarına gösterilen ilgiye örnek verebiliriz. Gerçek olan Hamilton'un kuaterniyonların uzayda dönme işlemiyle ilgisini kurunca kapıldığı coşkunun büyüklüğüdür. Hamilton yaşamının son yirmi yılını bu cebirin özelliklerini incelemekle geçirdi. A. Cayley, K. Clifford, J.J. Slyvester gibi İngiliz cebir geleneğini yerleştiren matematikciler ve elektromanyetik teoriyi bulan J.C. Maxwell ile P.G. Tait gibi fizikçiler de bu konuya önemli katkılarda bulundular. Hamilton'un ölümünden sonra, 20. yüzyılın başlarında, vektör ve tensör cebirini geliştiren fizikçiler ile kuaterniyon cebirini kullanan fizikçiler arasında büyük tartışmalar çıktı. Sonuçta başını Amerika'nın hatırı sayılır ilk teorik fizikçisi olan J.W. Gibbs'in çektiği bilim adamları vektör cebirini benimsetmekte başarılı oldular. Gibbs, Yale Üniversitesi'nin öğretim üyesiydi. Feza Gürsey uzun yıllar bu köklü Amerikan üniversitesi'nde, büyük prestij taşıyan Gibbs Fizik Profesörü ünvanını taşımıştır.

Kuaterniyonların fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein'ın özel ve genel relativite teorileridir. Bu teorilerde zaman kavramı, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzaydan bağımsız olarak mutlak bir nitelik taşımaz. Dört boyutlu uzay-zaman'ın her bir naktası, belli bir anda belli bir noktada yer alan bir olguya karşı gelir. Tipik bir uzay-zaman noktası

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

Kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir. Burada t zaman koordinatını, c ise boşlukta ışık hızını göstermektedir. Bu tanımlar yardımıyla uzay-zamanda hareket eden bir noktasal taneciğin konumu

$$X = ix^0 + \hat{e} \cdot \vec{x}$$

ifadesiyle verilen bir kompleks kuaterniyon ile gösterilebilir. Bu ifadede kuaterniyon birimleri $\hat{e}$: (i,j,k) üçlüsü ile, uzay koordinatları ise $\vec{x}$: (x,y,z) vektörü ile verilmektedir. $i^2 = -1$ kompleks sanal birim sayıdır. X kuaterniyonunun normu açık olarak yazılırsa

$$N(X) = X\bar{X} = -(x^0)^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}$$

bulunur. Kompleks kuaterniyon cebirinin norm koruyan otomorfizmleri

$$X \rightarrow X' = UXU^{\dagger},$$

X kuaterniyonunun karşı geldiği uzay-zaman vektörünün Lorentz dönüşümlerinden başka bir şey değildirler. Böylece Einstein'ın relativite teorisinin temelini oluşturan Lorentz dönüşümleri kompleks kuaterniyon cebirinin norm koruyan otomofizmleriyle özdeşleşmiş olmaktadır. İlk kez 1912'de A.W. Conway ve L. Silberstein tarafından özel relativite teorisi için öne sürülen bu yaklaşım o sırada tensör cebirini yerleştirmekle uğraşan fizikçiler arasında rağbet kazanmadı.

Kuaterniyonların fizikte yoğun kullanım bulması ancak E. Schrödinger, W.Heisenberg, P.A.M. Dirac, M. Born ve adlarını sıralamaya yerimiz yetmeyecek daha pek çok ünlü fizikçi tarafından 1927 ile 1932 yılları arasında beş senede neredeyse bugün kullandığımız haline getirilen kuantum mekaniğinin bulunuşundan sonra gerçekleşmiştir. Yine de fizikçilerin çoğunluğu kuaterniyonları kuaterniyon olduğunu düşünmeden kullanmaktadırlar. Bir atomu gözümüzde canlandırabilmek için çok kez atomu minyatür bir gezegen sistemi gibi ele alırız (Bohr modeli). Böylece, örneğin bir hidrojen atomunu merkezde hareketsiz duran ağır bir proton ile bunun etrafında kapalı bir yörünge üzerinde hareket eden bir elektron olarak düşünürüz. Bu modelin hemen akla getirdiği bir fikir, elektronun yörüngesel açısal momentumundan başka, sanki bir topaç gibi spin açısal momentumunun da var olabileceğidir. Nitekim elektron spininin varlığı 1927'de deneylerle kanıtlanmıştır. Bu deneyler aynı zamanda klâsik fiziktekinin aksine kuantum mekaniğinde elektron spininin sadece iki değer alabildiğini ve bu nedenle ancak 2 x 2 Pauli spin matrisleri cinsinden tarif edilebileceğini de göstermiştir: $\vec{\sigma}$ matrislerinin karelerini ala-

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rak ve birbirleriyle çarpımlarına bakarak kuaterniyon cebirinin sanal elemanlarının bir temsilinden başka bir şey olmadıkları kolayca gösterilebilir. Yani kuantum mekaniğinde elektron spinini tarif ederken açıkça belirtilmese de kuaterniyon cebiri kullanılmaktadır.

İki değerli spine sahip bir taneciğin, örneğin ışık hızından çok yavaş hareket etmekte olan bir elektronun kuantum mekaniksel hareketine bakılırsa, kompleks değerli tek bir dalga fonksiyonuyla elektronun kuantum durumunun tarif edilemeyeceği görülür. Elektronun momentumu $\vec{p}$ vektörü ile verilsin. Eğer elektronun spin ekseni momentum vektörü ile aynı yönde ise elektronun kuantum durumuna "spin yukarı" diyelim ve $\Psi_1(\vec{x},t)$ dalga fonksiyonuyla verelim. Eğer spin ekseni momentum vektörüyle zıt yönde ise bu sefer elektronun kuantum durumuna "spin aşağı" diyelim ve $\Psi_2(\vec{x},t)$ dalga fonksiyonuyla verelim. Genelde spin ekseni momentum vektörüyle aynı doğru üzerinde bulunmak zorunda değildir. Elektronun böyle genel bir kuantum durumunu tarif etmek için iki elemanlı bir sütun matrisinden ibaret

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

dalga vektörü tanımlanır. Birinci elemanın mutlak değer karesi elektronun t anında, $\vec{x}$ noktasında spininin yukarı ölçülmesi olasılığına, ikinci elemanın mutlak değer karesi ise yine t anında, $\vec{x}$ noktasında spinin aşağı ölçülmesi olasılığına eşittir. İki değerli spine sahip bir taneciğin kuantum dalga vektörüne spinor adı verilir. Bir spinor üzerine işlem yapan kuantum operatörleri, örneğin momentum operatörü $\vec{\sigma}.\vec{p}$ gibi, 2x2 matrislerdir. Dolayısıyla kuantum operatörleri kuaterniyonlarla gösterilebilir. Bu yaklaşımda bir spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}$$

ifadesiyle tanımlanan bir kompleks kuaterniyonla verilir. İlk kez fizikciler tarafından tanımlanan spinorların matematik formalizmi 1930'da B.L. van der Waerden tarafından geliştirildi. Daha sonra bu kavram E. Cartan ve H. Weyl tarafından daha yüksek boyutlu vektör uzayları üzerine genelleştirildi. Bugün spinorlar fizikte vektörlerden daha temel bir rol oynamaktadırlar.

Yukarıda spinor kavramını tanımlamak üzere düşünülen bir spinli noktasal taneciğin hızının ışık hızına göre çok yavaş alınması dikkatinizi çekmiş olmalıdır. Gerçekte atom boyutlarında veya çok daha küçük mesafe ölçeklerinde ele alınan noktasal taneciklerin hızlarının ışık hızına yakın olması gerekir. Ayrıca doğada ışık hızıyla hareket eden spinli, kütlesiz bir temel parçacık da vardır. Bir nötronun β bozunumunda yer alan bu parçacık elektriksel yük de taşımadığı için nötrino diye adlandırılır ve diğer temel parçacıklarla etkileşmeleri zayıftır. Bu nedenle varlıkları 1931'de W. Pauli tarafından öne sürülmüş olmasına rağmen ilk kez gözlenmeleri 1953'de gerçekleşmiştir. Bir nötrinonun spin ekseni ya hareket yönüyle aynı yönde, ya da hareket yönünün tersi yönde olmak zorundadır. Birinci halde nötrino saat ibresinin tersine dönen bir vida gibi, ikinci halde ise saat ibresi yönünde dönen bir vida gibi gözükecektir. İlk durumda nötrinoya sağ elli, ikinci durumda ise nötrinoya sol elli denebilecektir. Bu iki durum arasında bir geçiş olamaz. Çünkü böyle bir geçişin olabilmesi için nötrinonun bir an durup sonra ters yönde ivmelenmesi gerekir. Işık hızıyla hareket eden bir parçacık hiç bir fiziksel gözlemciye göre duruyor görünemez. Bir nötrinoyu iki elemanlı bir spinorla temsil ederek H. Weyl'in inşa etmiş olduğu relativistik nötrino dalga denkleminin doğada var olduğu sanılan mutlak sağ-sol simetrisini bozduğunu ilk kez W.Pauli farketti. Bu nedenle Weyl denklemi yirmi sene kadar bir köşede kaldı. Feza Gürsey'in 1950 tarihli relativistik nötrina denkleminin kuaterniyonlarla ifadesi üzerine yazdığı ilk makalesi bir istisnadır. 1957'de Amerika'da çalışan iki genç Çinli fizikçi, T.D. Lee ve C.N. Yang zayıf etkileşmelerine bakarak kütlesiz bir nötrinonun dinamiğinin sol elli Weyl denklemiyle verilmesi gerektiğine dikkatleri çektiler ve doğada mutlak bir sağ-sol simetrisinin olmadığını öne sürdüler. Nitekim aynı yıl içerisinde yine Çinli bir deneysel fizikçi hanım C.S. Wu tarafından doğada sadece sol elli nötrinoların bulunduğu, sağ elli nötrinoların bulunmadığı kanıtlandı. 1958'de kütlesiz sol elli nötrino denkleminin o güne dek bilinmeyen bir simetrisine W. Pauli ile beraber ama bağımsız olarak dikkatleri çeken Feza Gürsey böylece daha sonraki yıllarda pek çok incelemeye konu edilen kiral modellerin yolunu açmış oldu.

Relativistik elektron teorisi matematik olarak nötrino teorisinden daha karmaşık görünmekle beraber fizikçiler tarafından anlaşılması çok daha önce olmuştur. Bunu biraz da özel relativite teorisi ile kuantum mekaniğini bağdaştırmak üzere ilk çalışmaları yapan İngiliz fizikçisi P.A.M Dirac'ın güçlü önsezilerine borçluyuz. Dirac, momentumda lineer olacak relativistik bir dalga denklemi elde etmek istiyordu. Bu amaçla

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$$

diye verilen relativistik enerji ifadesinin karekökünü operatör anlamında almağa çalıştı. Eğer $\alpha_1 cp^1 + \alpha_2 cp^2 + \alpha_3 cp^3 + \beta mc^2$ diye lineer bir operatör tanımlar ve bunun karesinin E^2'ye eşit çıkmasını isterse, $\vec{\alpha}$ ve β diye gösterilen niceliklerin şu bağıntıları sağlamaları gerektiğini buldu:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1.$$

Yukarıdaki bağıntıları sağlayan nicelikler ancak 4 x 4 matrislerle temsil edilebilirler ve günümüzde bu matrislere Dirac matrisleri denmektedir. Dirac tarafından 1928'de yazılan relativistik elektron dalga denklemi

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc\beta)\Psi = \frac{E}{c}\Psi$$

Dirac denklemi adını alır. Burada elektronu tarif eden Ψ dalga vektörü artık dört elemanlı bir sütün matrisidir ve Dirac spinoru diye bilinir. Dirac denklemi, çok incelenmiş ve bugün de büyük önem taşıyan, fizikte en tanınmış denklemlerden birisidir. Bu denklemin en önemli niteliklerinden birincisi elektron spinini kendiliğinden içeriyor olmasıdır. İkincisi ise anti-parçacıkların varlığını gerektirmesidir. Eğer Ψ bir elektrona karşı geliyor denirse Dirac denklemi elektronla aynı kütleye sahip fakat zıt elektrik yüklü bir parçacığı da aynı anda tarif etmektedir. Dirac denklemi yazıldığı sırada varlığı bilinmeyen böyle bir parçacık ilk kez 1932'de gözlenmiş ve pozitron (yani artı yüklü anti-elektron) diye adlandırılmıştır. Bugün artık doğadaki her temel parçacıkla birlikte gelen bir anti-parçacığın varlığı biliniyor. Elektrik yüksüz parçacıklar bile ya kendi kendilerinin anti-parçacıklarıdır, ya da bazen kendilerinden farklı fakat yine yüksüz anti-parçacıkları vardır.

Matematik açısından Dirac matrisleri aslında bir Clifford cebirinin generatörlerinin temsilinden başka bir şey değildirler. $2^4 = 16$ boyutlu Dirac-Clifford cebiri 4×4 total matris cebirine özdeştir. Yani herhangi bir 4x4 matris birbirinden bağımsız 16 adet taban matrisinin lineer toplamı şeklinde açılabilir. Taban matrislerini oluşturmak için dört adet bağımsız matris alarak bunların ikili, üçlü ve dörtlü bütün çarpımlarını bulmak yeterlidir. Birim matrisle birlikte bunlar 4x4 total matris cebirinin bir tabanını oluştururlar. Dirac matrisleri bu anlamda Dirac-Clifford cebirinin generatörleridir. 2x2 total matris cebirinin kuaterniyon cebirine özdeş olduğu görülmüştü. Dirac matrisleri birbirinden bağımsız iki kuaterniyon kümesi cinsinden yazılabilir. Bunu anlamak için 4x4 matrislerin her birinin 2x2 blok matrislerden oluştuğuna dikkat edelim. Bu 2x2 blok matrislerin her birisi birer kuaterniyona karşı gelir. Böylece verilen 4x4 matris iki bağımsız kuaterniyon kümesinin elemanları cinsinden ifade edilebilir. Bu işleme iki kuaterniyon cebirinin yarı-direkt çarpımını almak denir. Bu türden soyut cebirleri K. Clifford 1855'de en genel halinde inşa etmişti. Kuaterniyon cebiri ve Dirac cebiri Clifford cebirlerinin birer özel hali olarak görülmektedirler. Nasıl iki elemanlı bir spinor kuaterniyon cebirinin elemanı olarak düşülüyorsa dört elemanlı bir Dirac spinoru da aynen öyle Clifford cebirinin bir elemanı olarak düşünülebilir. Soyut Clifford cebirleri günümüzde elektron, nötrino v.b. iki değerli spin taşıyan ve bu nedenle Pauli dışarlama ilkesine uyan fermiyon adını verdiğimiz parçacıkların incelenmesinde, kuantizasyonunda ve süpersimetri kavramlarının geliştirilmesinde önemli rol oynamaktadırlar.

Buraya kadar reel, kompleks ve kuaterniyonik sayı cebirlerinin fizikteki kullanımlarını kısaca gözden geçirmiş olduk. Kuaterniyon cebirini genelleyen tek bir bölüm cebiri daha vardır. Bu cebirin herhangi bir elemanını tanımlayabilmek için bağımsız yedi tane sanal birim sayı ve bunların birbirleriyle çarpım kurallarını vermek gerekir. Bu sayı sistemine oktoniyon cebiri veya 1845'de bu cebiri bulan İngiliz matematikçisinin adı ile Cayley cebiri adı verilir. Tipik bir oktoniyon şöyle yazılabilir:

Burada bağımsız yedi adet sanal birim eleman (e_α) ile gösterilmektedir. Bunların birbiriyle çarpımı

$$\omega = q_0 + \sum_{\alpha=1}^{7} q_\alpha e_\alpha .$$

ifadesiyle verilmektedir. Tümüyle antisimetrik, reel değerler olan ϕ tensörünün açık tanımı burada amaçlarımız için gerekli değildir.

$$e_\alpha e_\beta = -\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{7} \phi_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma$$

Herhangi iki oktoniyon yukarıdaki kurallar yardımıyla çarpılır. Bir oktoniyonun eşleniği $\overline{w} = q_0 - \Sigma q_\omega e_\alpha$ ifadesiyle verilir.

Böylece bir oktoniyonun skalar kısmı $Sc(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega})$ ile vektör kısmı $Vec(\omega) = \frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega})$ ayrılabilir. Oktoniyon normu $N(\omega) = \omega\overline{\omega} = \overline{\omega}\omega$ şeklinde tanımlanır. Buradan, sıfırdan farklı bir oktoniyonun tersinin $\omega^{-1} = \overline{\omega}/N(\omega)$ diye bulunacağı görülmektedir. Oktoniyon cebiri ne komütatif, ne de asosiyatiftir.

Oktoniyon cebirinin fizikteki yeri nedir? İşte bu sorunun yanıtını Feza Gürsey araştırmaktaydı. Feza Gürsey'in çağdaş fiziğe önemli katkıları, esas olarak yüksek enerji fiziğinde elementer parçacıkların simetrileri ve bunları birarada tutan etkileşme kuvvetlerinin dinamiğini belirleyen kuantumlu ayar alan teorileri üzerinde olmuştur. Feza Gürsey bu konuları incelerken kuaterniyon ve oktoniyon cebirlerinin özelliklerinden geniş ölçüde yararlanmıştır. Kuaterniyon ve oktoniyon cebirleri ile bunlardan türetilen kompleks kuaterniyonlar veya kuaterniyonik oktoniyonlar gibi cebirsel sayı sistemlerinin (Rosenfeld cebirleri) otomorfizm grupları olarak ortaya çıkan istisnai Lie simetri grupları üzerine inşa etmiş olduğu büyük birleştirme modelleri halen deneylerle kanıtlanmayı beklemekteler.

Kuaterniyonik ve oktoniyonik cebirlerden istisnai ayar teorilerinin nasıl elde edildiği sorusunun yanıtını biraz daha derinliğine tartışmadan önce çağdaş parçacık fiziğinde durum nedir, bunu kısaca bir gözden geçirmek yararlı olacaktır.

1) Hızlandırıcı ve çarpıştırıcılarda yapılan deneyler doğada var olan elementer parçacıkların tamsayı elektrik yüklü altı adet **lepton** ile kesirli elektrik yüklü, her biri üçlü ailelerden oluşan altı türden toplam onsekiz adet **kuark**'tan ibaret olduğunu kanıtlamıştır.

2) Atom çekirdeklerini oluşturan proton, nötron gibi parçacıklara **baryon** ve bunların birbirleriyle etkileşmelerini sağlayan parçacıklara ise **mezon** adı verilir. Eğer q ile bir kuarkı $\overline{q}$ ile bir anti-kuarkı gösterirsek, mezonlar ($\overline{q}$ q) gibi kuark-antikuark bağlı durumlarıyla, baryonlar ise (qqq) gibi üç kuark bağlı durumlarıyla tarif edilirler. Kuarklardan yapılan baryon ve mezonlara topluca **hadron** adı verilir.

3) Elementer parçacıklar arasındaki etkileşmeler dört türdendir. Uzun erimli **elektromanyetik** kuv-

vetler aracılığıyla elektrik yükü taşıyan parçacıklar etkileşirler. Çekirdeklerin radyoaktif bozunumundan sorumlu olan **zayıf** kuvvetler kısa erimlidir. Leptonlar sadece zayıf kuvvetlerle etkileşirler. Kuarkları bir arada tutarak hadronların oluşmasından sorumlu olan kuvvetler **şiddetli** kuvvetlerdir. Kuarkların taşıdığı renk yükünün (bu bildiğimiz renk değil, kuarkların doğrudan gözlenemeyen bir özelliğidir) değiş-tokuşundan kaynaklanır. **Kütleçekim** kuvvetleri evrensel ve uzun erimlidir. Doğadaki her cisim bu kuvvetlerle etkileşir. Ancak etkisi diğer kuvvetlerinki yanında ihmal edilebilir.

4) Elektromanyetik enerjiyi taşıyan kuantumlara **foton** denir. Fotonların kütlesi sıfırdır. Benzer olarak zayıf etkileşmeleri taşıyan üç farklı kuantum vardır. Bunlar 1983'de ilk kez İsviçre'de CERN laboratuvarlarında gözlenmiş olan, ikisi elektrik yüklü $W^{\pm}$ ile yüksüz Z^{0} **zayıf ara bozonları**'dır. Bunların kütleleri yaklaşık proton kütlesinin 90 katı kadardır. Bu nedenle zayıf kuvvetler kısa erimlidirler. Şiddetli kuvvetleri taşıyan kuantumlara **gluon** adı verilmektedir. Bunların değiş-tokuşu kuarkların renklerini değiştirir. Bu nedenle gluonların kendileri de renk yüküne sahiptirler. Birbirinden farklı, hepsinin kütlesi sıfıra eşit sekiz adet gluon bulunur. Kütlesiz olmalarına rağmen bunların yarattığı kuvvetler uzun erimli değildirler. Çünkü duran iki kuark arasında değiş-tokuş edilen bir gluonun taşıdığı renk yükü anti-perdeleme yaparak iki kuark arasındaki etkileşme kuvvetinin asimptotik özgürlüğüne yol açar. Yani, iki kuark arasındaki kuvvet kuarklar arasındaki mesafe ile düz orantılıdır. Bu ifade normal kuvvetler dediğimiz kuvvetleri veren ters kare kuvvet yasası ile karşılaştırılırsa aradaki fark hemen görülecektir. Renk kuvvetlerinin asimptotik özgürlük denen bu nitelikleri kuarkların oluşturucu parton karakterini belirlemekte ve "renk hapsi" varsayımına destek olmaktadır. Bu temel varsayım, kuarkların ve gluonların serbest olarak gözlenememeleri üzerine öne sürülmüştür.

5) Elektromanyetik ve zayıf kuvvetler aşağı yukarı yüz proton kütlesine eşdeğer çok yüksek enerjilere ulaşılan deneylerde birleşmektedirler. Yani bu kuvvetler aynı ayar alan teorisinin farklı öğeleri gibi gözükmektedirler. 1960'ların ortalarında Amerikalı fizikçiler S. Glashow ve S. Weinberg ile Pakistan'lı A. Salam tarafından bulunmuş olan **elektrozayıf etkileşmeler teorisi**'nin deneysel kanıtları 1970'lerden sonra güvenilirlik kazanmıştır. Foton ile zayıf ara bozonların kütleleri arasındaki muazzam fark nedeniyle düşük enerjilerde elektrozayıf simetri bozulmaktadır. Bu simetri bozulması **Higgs bozonu** adı verilen ve diğer elementer parçacıklardan farklı niteliklere sahip bir parçacığın daha varlığını gerektirmektedir. Halen Higgs bozonunun gözlenmesi için deneyler yapılmaktadır.

Fizikçiler yukarıda en kaba çizgileriyle tanıtılan yapının kabul görmesi üzerine 1970'lerin ortasında başlayarak bilinen tüm kuvvetleri tek bir ayar teorisiyle verecek olan büyük birleştirme modellerini inşa etmek uğraşına girdiler. Bir **büyük birleştirme modeli**'nin ayar simetri grubu ne olmalıdır? Feza Gürsey'in önerisi E_6, E_7, E_8 simgeleriyle gösterilen istisnai Lie gruplarından birisini evrensel ayar grubu olarak kullanmak olmuştur. Basit Lie gruplarının Cartan sınıflandırmasına kısaca bir göz atılırsa, ayar simetri grubunun aşağıdaki sınıflardan birisi arasından seçilmesi gerektiği ortaya çıkmaktadır:

1) SO(n) Ortogonal gruplar, n x n reel değerli ortogonal matrislerle temsil edilirler.

2) SU(n) Üniter gruplar, n x n kompleks değerli üniter matrislerle temsil edilirler.

3) Sp(n) Simplektik gruplar, n x n kuaterniyon değerli simplektik matrislerle temsil edilirler.

4) G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 İstisnai gruplar. Bunların hepsi oktoniyonik cebirlerle ilişkilidir. G_2 oktoniyon cebirinin otomorfizm grubudur ve diğer bütün istisnai grupların içinde bir altgrup olarak bulunur.

Feza Gürsey'in makalelerinden basitleştirerek aldığım Freudenthal'ın sihirli karesi adı verilen aşağıdaki tablo üzerinde parçacık fiziğinde karşımıza çıkan en temel simetri grupları görülmektedir. Her ne kadar bu tablonun çıkartılması üzerinde duramayacak olsak da en azından tabloda Rosenfeld cebirleri üzerinde işlem yapan Jordan operatör cebirlerinin otomorfizm gruplarının gösterildiğini söylemek bile, tabloda sırasıyla **R**, **C**, **H** ve **O** simgeleriyle gösterilen bölüm cebirlerinin (**R** = reel, **C** = kompleks, **H** = kuaterniyon **O** = oktoniyon) fizikteki simetri yasaları için taşıdığı önem hakkında bir fikir verebilecektir.

	R	C	H	O
R	SO(3)	SU(3)	Sp(3)	F_4
C	SU(3)	$SU(3) \times SU(3)$	SU(6)	E_6
H	Sp(3)	SU(6)	SO(12)	E_7
O	F_4	E_6	E_7	E_8

Bu yazıyı benim için değerli bir anıyı paylaşarak tamamlamak istiyorum. 1982 yazında on bir boyutlu uzay-zamanda yazılan basit süpergravitasyon teorisinin topolojik nitelikli çözümleri bulundu. Bu teori çerçevesinde, kütle-çekimi de dahil doğadaki tüm kuvvetlerin tek bir kuantumlu alan teorisi ile tarifi amaçlanmaktaydı. Birlikte çalıştığım İngiliz fizikçilerle bulunan çözümlerin topolojik niteliklerinin birim oktoniyonlarla açıklanabildiğini fark ettik. Makalemizin yazımı tamamlandıktan sonra Boğaziçi Üniversitesi'nde bir seminerde çalışmamızı anlattım. Seminer sırasında Erdal İnönü'den Feza bey'in de bu problem üzerinde çalıştığını duymak benim için hoş bir sürpriz oldu. Nitekim makalelerimiz aynı dergide kısa aralarla yayınlandı. Ertesi sene Feza Bey'le Adana'daki bir konferansta bir araya gelince yetiştirdiği gençlerin başarısıyla gururlandığını kendisinden duyarak ve bu olay nedeniyle onun da gerçek bir mutluluk yaşadığını gözleyerek Feza Gürsey'in aynı zamanda büyük bir insan olduğunu bir kez daha tanık oldum. Onun bıraktığı bilim meşalesini bir iki adım da biz taşıyabilirsek ne mutlu bizlere!