

Aperiyodik Yazılar I Estetiğin İzini Sürerken

Bir doğru parçasını nasıl olup da ikiye bölerseniz daha "estetik" olacağını hiç düşündünüz mü? Eğer düşünmediyseniz, lütfen şimdi düşünün. Elbette, herkesin farklı görüşleri olacaktır. Bazıları adaletli davranmak için "tam ortasından" cevabını verirler. Böylelikle elde iki eşit parça kalacaktır. Kimileriye tekdüzeligi pek sevmeyenler ve bir büyük bir de küçük parçanın olmasını tercih ederler. Örneğin; onlar için dörtte birlik bir oran uygun düşebilir. Oysa eski Yunanlılar'dan bu yana bilinen bir bölüm, bu yanıtlardan hiçbirine uymamaktadır ve pek çok sanat teorisini için de "doğru cevap"tır:

Burada eğer sol taraftaki parçanın uzunluğu $u=1$ ise, sağ taraftaki parçanın uzunluğu $v=0,618...$ olacaktır. Biliyorum, şu ana kadarki satırlar size çok tuhaf gelebilir ve bir doğru parçasını estetik olarak ikiye ayırmanın kaygısını daha önce hiç duymamış olabilirsiniz. Ancak yukarıda bahsettiğim ve *altın bölüm* olarak bilinen bu bölü-

lüm çeşidi ister istemez hayatımızda bir şekilde yerini alır. Gıptayla izlediğimiz pek çok sanat eserinde, gözümüze ilişen bir çam kozalağında, bir arının soy ağacında görebiliriz onu. Tabii, basit de olsa matematiksel bir gözlük takmak şartıyla...

Peki, nedir altın bölümü böylesine özel kılan? Psikolojik ve estetik kaygıları bir yana bırakırsak matematiksel açıdan bu sorunun cevabı basittir: u 'nın tüm uzunluk olan $u+v$ 'ye oranının, v 'nin u 'ya olan oranına eşit olması. Başka bir deyişle

$$\frac{u}{u+v} = \frac{v}{u} \text{ dur.}$$

Eğer u/v oranını ϕ ile gösterirsek

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{v}{u} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \phi$$

eşitliğine ulaşırız. Buradan elde ettiğimiz $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü ise

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

sonucunu verir ki bu orana da *altın oran* denir.



Franz Hals'ın Gülen Şövalye' si ideal bir insan vücudunda "burun" boyunu birim olarak seçersek,

Tepe-kaş arası : ϕ^1

Burun : 1

Burun altı-boğaz : ϕ^2

Boğaz-göğüs : ϕ^3

Göğüs-göbek : ϕ^4

olduğu görülür. Hals'ın bu eserinde de karşımıza yukarıdaki altın oran ölçeği çıkıyor. Ancak ideal insan vücudunda "burun boyu" neden birim olarak seçilmiştir; o da ayrı bir soru...

Şu Altın Oran Dedikleri...

Altın oran denilen bu oranın irasyonel ve cebirsel bir sayı olmaktan öte pek çok özelliği daha vardır. Öncelikle Öklid geometrisinde kendisine geniş bir yer edindiği söylenebilir. ϕ ile bir üçgende, bir piramitte ya da bir sarmalda karşılaşmamız pekâlâ mümkündür. Mesela; bunlardan *altın dikdörtgen* uzun ve kısa kenarlarının oranı ϕ 'yi veren dikdörtgendir. Atina'daki Parthenon Tapınağı'nın ön cephesi tam bir *altın dikdörtgen* içine oturtulabilir. Aynı tapınağın içindeki daha pek çok yapının da benzer özellikleri taşımasına şaşırılmak gerekir sanırım. Ancak *altın oran*, yalnızca eski Yunan sanatına yansımıştır. Mısır'daki Keops Piramidi'nden Paris'in ünlü Notre-Dame Katedrali'ne, Leonardo da Vinci'nin tablolarından Le Corbusier'in modern mimarisine dek ondan izleri açıkça görmek mümkündür. Hatta Türk mimari ve sanatı da *altın orana* ev sahipliği yapmıştır: Konya'da Selçuklular'ın inşa ettiği İnce Minareli Medrese'nin taçkapısı, İstanbul'daki Davut Paşa Camisi, Sivas'ta Mengüçoğulları'ndan günümüze miras kalan Divriği Külliyesi genel planlarından kimi ayrıntılarına dek ϕ ile içiçe bir görünüm sunar. Çağdaş Türk mimarisinde ise Anıtkabir'deki bazı mekânların yaklaşık olarak ϕ 'nin çeşitli fonksiyonlarını verecek şekilde ölçülendirilmesi dikkat çekicidir.

Tüm bu büyük yapıtların yanı sıra tavşanların da altın oranla uzaktan da olsa ilgilerini gözden kaçırmamak gerekir. Her şey *Pisali Leonardo* ya da diğer adıyla *Fibonacci*'nin (Bonaccio'nun oğlu anlamına gelir) 1202 yılında yayımladığı *Liber Abaci* adlı eserinde yer verdiği bir problemle başlar:

"Elimizde bir çift tavşan olduğuna varsayalım ve her ay bir tavşan çiftinin ikinci aydan itibaren doğurgan hale gelen yeni bir tavşan çiftini dünyaya getireceğini kabul edersek, bir yıl içinde kaç tavşan çiftimiz olur?"

Çözüm ise ilk ve ikinci ayda bir, üçüncü ayda iki ve takip eden aylarda da sırasıyla 3,5,8,13,21,34,55,89,144 tavşan çiftinin olacağını gösterir. Dikkat edilirse, iki ardışık ay için elde edilecek sayıyı vermektedir. Ancak tavşanların matematik dünyasına ilginç bir problem olmaktan öte katkıları da vardır. Öncelikle Lucas'ın 19. yüzyılda *Fibonacci dizisi* adını verdiği ve her bir terimi kendisinden önce gelen ilk iki terimin toplamı olarak belirlenen 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987.... dizisini bizlere kazandırmıştır.

Bu dizi, pek çok ilginç özelliğe sahip olmakla beraber konumuzla ilgilendiren ve hemen her zaman *altın oranla* birlikte anılmasına yol açan bir yanı daha vardır: O da 5. terimden son-



Turku ve Fibonacci

Fibonacci serisini doğada gözlemek elbette mümkündür, ama daha önce hiç iki metrelik, kırmızı, neon Fibonacci sayıları bir enerji santralinin yüz metrelik bacası üstünde görülmemiştir. Şimdi ise İtalyan Mario Mertz'in bu çalışması, Finlandiya'da Turku şehrinin gökyüzünü aydınlatıyor.

ra ardışık terimlerin oranlarının ϕ 'ye çok yakın olması ve terim sırası sonsuza giderken bu oranın ϕ 'ye yakınmasıdır. *Fibonacci dizisiyle altın oran arasındaki yakın ilişki, dizinin genel terimi f_n 'i veren Binet formülüyle açıkça görülebilir:*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

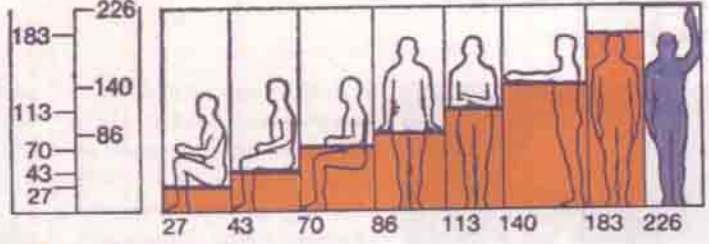
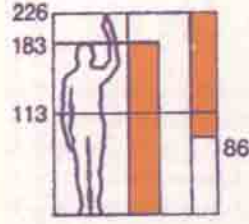
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\phi^n - (-\phi)^n], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Öte yandan *Fibonacci dizisi* kendine özgü bir düzen içinde artan bir dizidir. Yalnızca $n \rightarrow \infty$ durumunda ϕ 'yi veren ortak bir bölene sahip olması onu geometrik bir dizi olmaktan alıkoymaktadır. Oysa yine ϕ ile yakından ilgili, geometrik bir dizi daha vardır: *Altın dizi*. Ortak bölüni daima ϕ 'yi veren bu dizi

$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \dots$
 elemanlarından oluşur. ϕ^n değerlerinin açılmasıyla altın dizi $1, \phi, 1+\phi, 1+2\phi, 2+3\phi, 3+5\phi, \dots$ şeklinde de yazılabilir. Burada dikkati çeken nokta ise *altın dizinin Fibonacci dizisiyle aynı ardışık düzene sahip olması*, diğer bir deyişle $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ formülüne uygun artış göstermesidir.

Kerameti Tavşanlarda Aramak

Fibonacci dizisi, elbette yalnızca tavşanların arasında kendisini gösteren bir matematik-



Le Corbusier'in Modülör'ü

Altın oran, 1946 yılında ünlü mimar Le Corbusier tarafından da ele alındı ve mimarlıkta elverişli bir şekilde uygulanabilen orantılar sistemi olan *Modülör* böylece ortaya çıktı. Le Corbusier, önce kolunu kaldırmış bir insanın eriştiği yüksekliği (226 cm) standart bir ölçü olarak ele almış ve aynı ideal insanın yerden göbeğine kadarki yüksekliğini veren yarı değeri (113 cm) sürekli ϕ 'ye bölerek ya da çarparak elde ettiği sonuçları tam sayılara dönüştürmüştü. Ortaya çıkarsa, *Modülör* dediği ve *Fibonacci dizisine* benzer bir ardışıklık gösteren bir orantılar sistemiydi. Ünlü mimarın iddiası; bu sistem kullanıldığı takdirde doğrudan insanın doğasına hitap eden bir çevrenin yaratılacağıydı.

sel düzen değildir. Hatta doğanın inatla bu diziyi sahip çıkmaya çalıştığı bile söylenebilir. Bunu görmek için aşağıdaki kesirler dizisini incelemek yeterlidir:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \dots$$

Burada her terimin payı bir önceki terimin paydasına, paydası ise yine bir önceki terimin pay ve paydası toplamına eşittir. Aynı dizinin terimleri, *Fibonacci dizisindeki* ardışık terimlerin oranlarını da vermektedir. İşin ilginç yanı, doğada en sık karşımıza çıkan ayçiçeklerinde sağ ve sol sarmal sayılarının yukarıdaki dizinin terimleri olan 34/55 veya 55/89 oranlarında olmasıdır. Üstelik bu da yetmezmiş gibi sarmal oranları, çam

kozalağında 5/8, 8/13, papatyada 21/34, ananas mevyasında 8/13'tür. İşte tüm bunlar *Fibonacci dizisi* ya da *altın oranın* bizden hiç de uzakta olmadığını gösterir. Anların soy ağacında *Fibonacci dizisinin* matematiksel bir esas olarak karşımıza çıkması, *altın oranın* çeşitli geometrik şekillere bürünerek Eperia örümceğinin ördüğü ağlardan bir yaban keçisinin boy-nuzuna dek kendine yer edinmesi de aynı kaniyi güçlendirmektedir. Anlaşılan keramet tavşanlarda değil, doğanın kendi düzeni içinde bir yerlerde gizlidir.

Modern mi, değil mi?

Altın oranın ortaya koyduğu durağan ahenk klasik Yu-

nan matematiğinin ruhuna pek uymakla beraber, *Fibonacci dizisi* daha nicel ve sayısal bir matematiğin habercisi gibidir. Öte yandan sahip oldukları bu durağanlığa rağmen günümüz matematiğinden de uzak kaldıkları söylenemez. 1970'lerde Roger Penrose, *altın oranın* daha modern bir anlayışla yeniden gündeme getirmiştir. Penrose'un bulduğu iki basit şekil -biri uçurtma, bir diğeri ok ucuna benzeyen şekiller-, düzlemi periyodik (periyodik olmayan) bir şekilde kaplayabilmektedir. Üstelik bu iki şeklin birbirlerine oranı da tanıdık bir sayıya eşittir: *Altın oran*. İşin modern olan yanı ise, aynı şekillerin düzlemi periyodik olarak kaplayamamasıdır.

İşte tüm bunlar ve modern imajıyla altın oran gelecek sayıya yine aynı sayılarda...

Han Nazmi Özsoylov
 Bilim Matematik Topluluğu

Çözmece

1. $[(\sqrt{5}+2)^{1/3} - (\sqrt{5}-2)^{1/3}]^3$ ün rasyonel olduğunu gösterip, bu sayının değerini bulunuz.
 2. Ardışık Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğunun kanıtlayınız. (Not: $f_1=1, f_2=1, n \geq 2$ için $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$)

Geçen Ayın Çözümleri

1. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ olduğundan $f_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k}$
 $= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \frac{1}{k}$
 $= f_{n-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k}$

olur. Ayrıca; $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ olduğundan,

$$f_n = f_{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$= f_{n-1} - \frac{1}{n} [(1-1)^n - 1]$$

$$= f_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ olur.}$$

$$f_1 = 1 \text{ olduğundan}$$

$$f_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ bulunur.}$$

2. F_1 ve F_2 sırasıyla D ve A noktalarından BC'ye indirilen dikmelerin ayakları olsun. $p=BC=CD$ ve $q=AC$ olsun. $\triangle ABC$ 'ye Sinüs Teoremi'ni uygularsak $CF_1 = p \cos 80^\circ$, $CF_2 = q \cos 70^\circ$
 $= \frac{p \sin 30^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{p \cos 70^\circ}{2 \sin 80^\circ}$ olur.

Buradan;
 $\frac{CF_1}{CF_2} = \frac{\cos 80^\circ}{\cos 70^\circ}$
 $= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\cos 70^\circ}$
 $= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = 1$
 Dolayısıyla $F_1 = F_2$ olur ve bu nokta AD ve BC'nin kesişim noktası olur. Dolayısıyla AD \perp BC bulunur.

