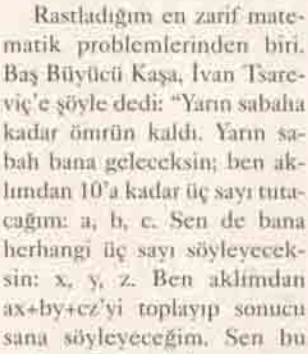
Zekâ Oyunları
Selçuk Alsan

Büyücünün Yenilgisi

Rastladığım en zarif matematik problemlerinden biri. Baş Büyücü Kaşa, İvan Tsareviç'e şöyle dedi: "Yarın sabaha kadar ömrün kaldı. Yarın sabah bana geleceksin; ben aklımdan 10'a kadar üç sayı tutacağım: a, b, c. Sen de bana herhangi üç sayı söyleyeceksin: x, y, z. Ben aklımdan ax+by+cz'yi toplayıp sonucu sana söyleyeceğim. Sen bu toplama bakarak bana tuttuğum a, b ve c sayılarını söyleyeceksin. Söyleyemezsen kafan ebediyen omuzlarının arasına gömülecek". İvan düşündü de düşündü ve nihayet bir çare buldu. Siz olsanız hangi üç sayıyı söylerdiniz?

Yıldızların Yıldızı



a) Resim 1'de 24 parçadan yapılmış 12 köşeli bir yıldız var. Bu 24 parçadan aynen bu biçimde ve bu büyüklükte üç adet 12 köşeli yıldız yapınız.
b) Resim 2'de 5 parçadan yapılmış 6 köşeli bir yıldız var. Bu 5 parçadan bir eşkenar üçgen yapınız.
c) Resim 3'de 10 köşeli bir yıldız var. Bu parçaları kullanarak 10 köşeli başka biçimde bir yıldız yapınız.
d) Resim 4'de 7 parçadan yapılmış 12 köşeli bir yıldız var. Bu 7 parçadan bir haç yapınız.

Turistik Şehir

Bir şehir daire biçimi bir surla çevrilmiştir. Şehrin içinde tarihî değeri olan A sarayı ve tarihî B zindanları var. Öyle iki yol yapmak istiyorsunuz ki biri A'dan, biri de B'den geçsin ve bu iki yol surların bir noktasında birbirlerini dik olarak kessin. Surların üstündeki bu kesişme noktasına M ve MA ve MB yi uzatarak bunların surları kestiği noktalara P ve Q dersek, P ve Q'yü birleştirecek yolun dairenin merkezinden geçmesi de isteniyor. Mimar olsanız nasıl bir çizim yapardınız?

Mısır Piramitleri

Bir Mısır piramidinin yüksekliği, iki haneli iki tek sayının çarpımından fazla, fakat toplamlarının yarısının karesinden daha küçük. Bu piramit hangi firavun zamanında yapıldı?

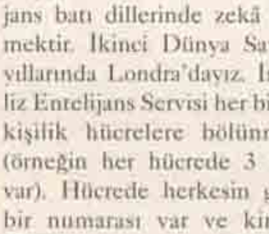
Bir Kurta İki Tavşan

Kurt 20 m. ötedeki tavşan yavrusunu gördü. Tavşan yavrusunun kaçıp kurtulabileceği orman 250 m. ilerdeydi. Ana tavşan, kurdun yavruyu bırakıp kendisini yemesi için kurdun önüne doğru koştu. Kurt 1 saniye durup düşündü: Çok miktarda kart et mi, az miktarda körpe et mi yemeliydi? Eğer tavşan yavrusunun hızı 540 m/dakika, kurdun 600 m/dakika ve ana tavşanın hızı en az kurdun hızı kadarsa kurt hangi kararı aldı ve sonuç ne oldu?

İstihbarat Akıl İşidir

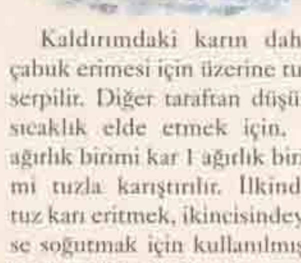
Yabancı dillerde istihbarat servislerine haklı olarak "entelijans servis" denir. Entelijans batı dillerinde zekâ demektir. İkinci Dünya Savaşı yıllarında Londra'dayız. İngiliz Entelijans Servisi her biri n kişilik hücrelere bölünmüş (örneğin her hücrede 3 kişi var). Hücrede herkesin gizli bir numarası var ve kimse kimsenin numarasını bilmiyor ve asla bilmemesi gerekiyor (bu, içlerine ajan sızması olasılığına karşı bir önlemdir). Her hücrenin diğer hücrelerden farklı bir aritmetik ortalaması var. Örneğin, A hücresinde 21, 19 ve 26 nolu ajanlar var; A'nın ortalaması (21+19+26)/3=22. 22 denince hatıra A hücresi geliyor. B hücresinde 1, 5 ve 15 var ve ortalama 7 vb. Bir ara hücrelerden birine bir ajan karıştığı haberi alınıyor. Direktör hem bu hücrenin ortalamasını- hem de bu hücredeki ajanların gizli numaralarını öğrenmek zorunda. Ne var ki ajanlara numaralarını soramıyor, bu numaralar direktörden bile gizli. O sırada otelde matematik ve bilmece kitapları almak için Londra'ya gelmiş olan ünlü bir Türk'e rastlıyor: "Bilinmeyece"ler Zordinaryüs Profesörü Cin Ruhi. Cin Ruhi bir hücrede mevcut n kişiden hiçbiri kendi numarasını açığa vurmadan ve diğer hiç kimsenin numarasını öğrenmeden, o hücredeki gizli sayıların ortalamasının bulunabileceğini iddia ediyor. Üstelik bu işi hücrede mevcut n kişi yapacak, dışarıdan yardım gerekmeyecektir. Bu nasıl olabilir? (Math Intelligencer, 1991, 13 (4):50'den modifiye).

Karabaslar ve Barabaslar



Perra-Terra ülkesinde Karabaslar ve Barabaslar yaşıyor. Her Karabas 6 Karabas ve 9 Barabas tanıyor. Her Barabas 10 Karabas ve 7 Barabas tanıyor. Bu ülkede Barabaslar mı, Karabaslar mı daha fazla?

Kar ve Tuz



Kaldırımdaki karın daha çabuk erimesi için üzerine tuz serpilir. Diğer taraftan düşük sıcaklık elde etmek için, 2 ağırlık birimi kar 1 ağırlık birimi tuzla karıştırılır. İlkinde tuz karı eritmek, ikincisindeyse soğutmak için kullanılmıştır; bu çelişki değil mi?

100x100 lük Satranç Tahtası

100x100 karelik bir satranç tahtasında, ortak bir kenarı olan iki kareyi "komşu" sayalım. Karelere tam sayılar yazılmış olsun; komşu karelere yazılan sayılar arasındaki fark 20'yi geçmesin. Kanıtlayınız ki böyle bir satranç tahtasında birbirinin aynı 3 sayı bulunmak zorundadır. (Kvant'dan)

Balığı Tartmak

Cin Ruhi'nin yeğeni Cinnoş oltasıyla gölde iri bir balık tutmuştu; bununla pek öğünüyordu. O sırada oradan geçmekte olan Kafaboş "bu balık 50 gr. bile gelmez; sen en iyisi onu kedilere ver" deyince Cinnoş kızdı: "Var mısın iddiasına" dedi; "bu balık en az 250 gr. gelir". Kafaboş alayla güldü: "Haydi oradan! Terazin yok ki; nasıl tartacaksın?" Cinnoş'un erzak çantasında tam 1 kg'lık bir ekmek vardı. Cinnoş balığını tartıp onun 250 gr. geldiğini gösterdi. Bunu nasıl yaptı dersiniz?

Şeytanın Oyunları

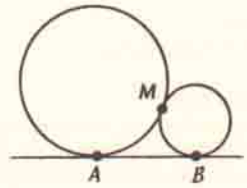
Bir gün Şeytan, Safalak Kabalak adlı köylüye şöyle bir teklifte bulundu: "Şu köprüden her geçişte cebindeki para iki kat olacak. Köprüden istediğin kadar geçebilirsin. Yalnız her geçişten sonra bana 24 lira vereceksin. Safalak kabul etti ve 3. geçişten sonra beş parasız kaldı. Safalak'ın başlangıçta ne kadar parası vardı?

Vagondaki Ampuller

Vagonda art arda bağlanmış 6 ampul var; her birinin üzerinde 110 volt, 25 watt yazıyor. Ampullerden biri patladı; yerine 110 volt, 40 watt'lık bir ampul takıldı. Bu ampul diğerlerinden daha parlak mı, daha sönük mü yanacaktır?

İki Daire

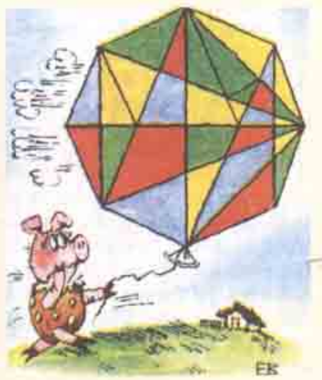
A ve B noktaları verilmiş. AB doğrusu iki daireye teğet; birine A, diğerine B noktasında teğet. İki daire birbirine M'de teğet. Her iki dairenin çapları sürekli değiştirilirse M'nin geometrik yeri ne olur?



Sınıf

Bir sınıfta toplam 28 öğrenci var. Bunların yaşlarının toplamı 166. Kız öğrencilerin yaş ortalaması 5, erkek öğrencilerin yaş ortalaması 7. Bu sınıfta kaç kız, kaç erkek öğrenci var? (ÖSYM 1994 sorusundan modifiye).

4 Renkli Uçurtma



Ayıcığın uçurtmasında 4 ayrı renkli geometrik şekiller var. Kanıtlayınız ki toplam yeşil alan=toplam kırmızı alan=toplam mavi alan=toplam sarı alan.

Yapılamayan Hareket

Arkadaşınıza sırtını duvara dayadıktan sonra dizlerini kırmadan parmak uçlarını yere değdirmesini söyleyiniz. Bunu asla yapamayacaktır. Neden?

Bir Japon Bilmecesi

Yedi eşkenar üçgenden yapılmış 24 polimino parçasını uygun bir şekilde sarı çokgenin içine yerleştirin; öyle ki hiç boş yer kalmasın. (Büyüterek renkli fotokopi çektirerek ve kağıtları ince tahta, plastik veya mukavvalara yapıştırarak çocuğunuza güzel bir zekâ oyuncağı yapabilirsiniz). (Çok uğraşabilirsiniz; fakat çözünce çok mutlu olacaksınız).

Geçen Ayın Çözümleri

Bando

Karenin kenarı a olsun. Dikdörtgen yaptıktan sonra mızıkacı sıra sayısı x azalsın. O halde: $a^2=(a-x)(a+5)$ ve buradan $a=5x/(5-x)$. Bu denklemi tam sayı olarak yalnız $x=4$ çözer. O halde $a=20$ ve mızıkacı sayısı $20^2=400$. Dikdörtgende her biri 20+5=25 kişilik 16 sıra var (20-4=16). Kare iken her biri 20 kişilik 20 sıra vardı.

Direnç

3R'den akım geçmez.

Kediyle Fare

Hayır, yakalayamaz. Kedi 5 sıçrayış yapmayı bitirdiğinde fare 15 adım atmıştır. Kedi 6. sıçrayışı bitirdiğinde fare 18. adımı bitirir. Fare 2 adım daha atarak deliğe erişir; bu sırada kedi son sıçrayışının ancak 2/10 unu tamamlamıştır.

Rasyonel Dik Açılı Üçgenler

Bunun için bir çok yöntem varsa da en kolaylarından biri şudur:

b	c	x	y	z	$x+y+z = 2b(b+c)$	b	c	x	y	z	$x+y+z = 2b(b+c)$
2	1	3	4	5	12	5	4	9	40	41	90
3	2	5	12	13	30	7	2	45	28	53	126
4	1	15	8	17	40	6	5	11	60	61	132
4	3	7	24	25	56	8	1	63	16	65	144
5	2	21	20	29	70	7	4	33	56	65	154
6	1	35	12	37	84	8	3	55	48	73	176

$x=b^2-c^2$, $y=2bc$, $z=b^2+c^2$ diyelim. b ve c aralarında asal (ortak asal çarpanları olmayan), biri çift, biri tek ve $b>c$ olan herhangi iki sayıdır. Örneğin $b=2$, $c=1$ alırsak $x=2^2-1^2=3$, $y=2.2.1=4$ ve $z=2^2+1^2=5$ buluruz, tipik 3,4,5 Pisagor üçlüsü. $b=3$, $c=2$ alsak $x=5$, $y=12$ ve $z=13$ buluruz. $5^2+12^2=13^2$ vb. x ve z daima tek, y daima çifttir. y daima 4 ile bölünür (çünkü $y=2bc$ ve b ve c'den biri çift). x veya y, 3 ile, x, y ve z'den biri 5 ile bölünür; bu nedenle xy, 12 ile ve xyz, 60 ile bölünebilir.

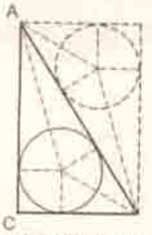
Kenarları bu yöntemle bulunan dik üçgenlere primitif diküçgenler denilir. Tabloda ilk 12 primitif diküçgen görülüyor. Bunların hepsinde $z<80$ ve $x+y+z<180$ dir. D.N. Lehmer (Amer J Math 1900, cilt 22, s.38) hipotenüsü z'den küçük primitif diküçgen sayısının $z/2\pi$ olduğunu kanıtladı. Çevresi X'den küçük dik üçgenlerin sayısı $(X \ln 2)/\pi^2$ dir. $80/2\pi=12{,}73...$ ve $(180 \ln 2)/\pi^2=12{,}64...$ dür.

$b-c=1$ ise $z-y=1$ bulunur (1., 2., 4., 7. ve 9. üçgenler). b ve c 1,2,5,12,29,70... sırasının ardışık terimleri ise (ve b/c şu sürekli bölüme konverjant (yakınsar) ise: $\sqrt{2}+1=2+1/2+1/2+1/...$)
$|x-y|=1$ dir. (1. ve 5. üçgenler).

F. Hoppenot gösterdi ki, en büyüğü $2n(n+1)$ olan $n+1$ ardışık tamsayının karelerinin toplamı, kendilerinden sonraki n tam sayının karelerinin toplamına eşittir: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ (Burada $n=2$ ve $2n(n+1)=2.2(2+1)=12$ olduğuna dikkat ediniz); $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$. $3^2+4^2=5^2$'e analog olarak $3^3+4^3+5^3=6^3$. Tabii ki Fermat'nın son teoremiyle uyumlu olarak $x^3+y^3=z^3$ ve $x^4+y^4=z^4$'ün çözümleri yoktur. Euler, benzer olarak $x^4+y^4+z^4=v^4$ denkleminin $v<220\,000$ için çözümünün olmadığını gösterdi (L.J. Lander ve ark. Math of Computation, 1967, cilt 21, s.446-459). Buna karşı $x^4+y^4=z^4+v^4$'ün sonsuz çözümü vardır.

Liu Hui'nin Dairesi

Diküçgeni kenarları axb olan bir dikdörtgene tamamlayalım. Her diküçgeni 1 kare ve ikisi büyük, ikisi küçük 4 diküçgene ayıralım. Bu şekiller uygun bir şekilde sıralanırsa orijinal dikdörtgenin iki katı büyüklükte bir dikdörtgen elde edilir. Bu dikdörtgenin boyu (a+b+c) ve eni r dir (daire çapı). Buradan: $r=2ab/(a+b+c)$. Örneğin $a=3$, $b=4$ ve $c=5$ ise; $r=2.3.4/(3+4+5)=24/12=2$. Ne kadar zarif bir kanıtlama.



Dörtyüzlü ve Küreler

Önce üçgen sayıları öğrenelim:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66...,$1/2n(n+1)$. Bunlar 1 ile başlayan ve n'e kadar olan ardışık doğal sayıların toplamıdır; yani 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ..., 1+2+3+4+...+n. Üçgen denmesinin nedeni en tepeye 1, onun altına 2, onun da altına 3... daire konulursa, bunların toplamının üçgen sayı vermesidir. (Örneğin, 1+2+3=6). Bir üçgen sayı kare olabilir mi? Evet, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, ... sayıları hem kare, hem de üçgen sayıdır; bu gibi kare üçgen sayıların özelliği b^2c^2 şeklinde olmasıdır. Örneğin $\sqrt{36}=6=2.3$ ve $2^2.3^2=4.9=36$; $\sqrt{1225}=35=7.5$ ve $7^2.5^2=1225$; $\sqrt{41616}=204=17.12$ ve $17^2.12^2=41616$ vb. Bu durumlarda b/c, $\sqrt{2}$ sürekli bölümünün herhangi bir konverjantıdır (bk. sürekli bölüm problemi) 3/2,7/5,17/12 $\sqrt{2}$ sürekli bölümün konverjant'larıdır).

Şimdi gelelim tetrahedral ve piramidal sayılara. Üçgen sayılar dizisini yazalım; onun altına 2. bir sıra şeklinde ardışık üçgen sayıları toplaya toplaya yazalım:

1, 3, 6,10, 15, 21
1, 1+3=4, 6+4=10, 10+10=20, 20+15=35, 35+21=56
Bu ikinci diziyi yazalım:
1, 3, 6,10,15, 21, 28, 36, 45
1,4,10, 20, 35, 56, 84,120, ...,$1/6n(n+1)(n+2)$. Bunlar tetrahedral sayılardır. Şimdi de ardışık doğal sayıların karelerini yazalım:
1,4, 9,16, 25, 36, 49, 64...
Bu sayıları kümülatif olarak toplarsak piramidal sayılar elde ederiz:
1, 1+4=5, 5+9=14, 14+16=30, 30+25=55,...
1 hariç kare olan tek piramidal sayı 4900'dür. (Lucas 1875; Watson 1918); bunun kanıtlanması hiç de basit bir iş değildir.
İki ardışık üçgen sayının toplamı daima bir karedir:
1+3=4, 3+6=9, 6+10=16, 10+15=25,...
İki ardışık tetrahedral sayının toplamı bir piramidal sayıdır:
Tetrahedral sayılar: 1, 4,10, 20, 35, 56, 84,...
Piramidal sayılar: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204,...
Ardışık doğal sayıların küplerinin kümülatif toplamı üçgen sayıların karesidir:
1^3, 2^3, 3^3, 4^3...
1, 8+1=9, 9+27=36, 36+64=100,... (1^2,3^2,6^2,10^2,...)

Asansör

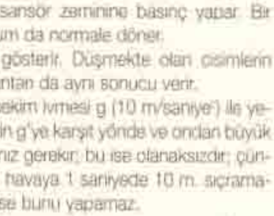
a) Yukarı çıkarken ağırlığınız azalır. Bunun nedeni, vücudunuzun asansörün yukarı doğru hızını hemen kazanamayışıdır. Bu nedenle kendinizi hafiflemiş hissedersiniz. Bu yerçekimsizlik duyusunun en basit şeklidir. Bir süre sonra vücudunuz asansörün yukarı doğru hızını kazanır ve hafiflemeniz son bulur. Aşağı inerken bunun tersi olur: Vücudunuz asansörün hızından daha hızlı aşağı düşmek istediğinden ağırlığınız artmış gözükür; tabanlarınız asansör zeminine basınç yapar. Bir süre sonra bu durum da normale döner.

b) Terazi sıfırı gösterir. Düşmekte olan cisimlerin ağırlığı sıfırdır. El kantarı da aynı sonucu verir.

c)Asansör yerçekim ivmesi g ($10\ m/saniye^2$) ile yere çakıldığından sizin g'ye karşıt yönde ve ondan büyük bir ivme oluşturmanız gerekir; bu ise olanaksızdır; çünkü g çok büyüktür, havaya 1 saniyede 10 m. sıçramanız gerekir, hiç kimse bunu yapamaz.

d) Hızlı mı iniyorsunuz, düşüyor musunuz anlamanız zordur. Düşmekte olan bir asansörde bir kaleme hafif bir fiske vursanız, kalem karşı duvara kadar yatay gider ve orada kalır; yere düşmez. Asansör ne kadar hızlı inerse insin, serbest düşme yoksa kalem havada kalmaz, yere düşer.

Düzgün Yirmidörtgen Tarla



Şekil 1'e bakarak şu formülleri çıkarabiliriz: $a=2R \sin \pi/n$; $a=2r \tan \pi/n$; $S=nar/2$; $S=nR \sin \pi/n\, R\cos \pi/n = nR^2/2 \sin 2\pi/n$; $S=nr^2 \tan \pi/n$ ve $S=na^2/4 \cot \pi/n$. Son formülü kullanalım. $180/24=7.5°$, $\cot 7.5°=7{,}595754$, $n=24$, $S=182$. Buradan $a^2/4=1$ (yaklaşık) ve $a^2=4$ dan $a=2m$. bulunur. (R= çevresel çemberin yarıçapı, r= iç teğet çemberin yarıçapı, a= kenar uzunluğu, n= kenar sayısı). (Matematik Dünyası 2(4): 7, 1992)

Josephus Problemi

a) Bu sayımın sonunda 1. sayımda 15. olan çocuk, adamın öz oğullarından biri, en sona kalır; deneyebilirsiniz.

b) n+1 kişi halka olmuşken m sayılır ve bunun sonucu geriye r kişi kalırsa n kişi varken p. sırada olan bir kişi, şimdi $(p+m)\leq(n+1)$ ise (p+m). sırada, $(p+m)>(n+1)$ ise (p+m-n-1). sırada olur. Demek ki m sayma sonucu, n kişiden geriye r kişi kalmışsa, aynı işlem (n+1) kişi ile yapılınca her kişinin sıradaki yeri m kadar ileriye kayar.

Josephus olayını bu yönden inceleyelim. m= 3 ve n= 41 dir. Josephus 31. sıradaydı; yani p=31. Şimdi 41 değil (41+x) kişi olduğunu varsayalım ve Josephus bu son durumda kaçıncı sırada olurdu, onu görelim. Josephus'un halkadaki yeni sıra numarası y ise:

$y=(31+3x)-(41+x)=2x-10$ bulunur. x' e öyle bir değer verelim ki $y<m$ ve pozitif olsun. m= 3 olduğundan $y<m$ için y=2 verelim. O zaman 2x-10= 2'den x=6 bulunur. Bir diğer deyişle n= 41 kişilik halkada m= 3 sayarak Josephus p=31, iken, n=41+6=47 kişilik halkada m= 3 sayarak Josephus y= 2. olur. Bu şu demektir: 41 kişilik halkada 3 sayarsak 31. olan Josephus sona kalır; 47 kişilik halkada yine 3 sayarsak, bu defa 2. olan kişi sona kalır; yani 41 kişilik halka 6 kişinin daha gelmesiyle 47 kişiye çıkarsa, Josephus sağ kalabilmek için 31. sıradan 2. sıraya gelmelidir. Halka 47 kişiden 70 kişiye çıkarsa, (x=23 demektir; 23+47= 70). $y=(2+3x)-(47+x)=2x-45$'den x=23 için y= 1 bulunur; halka 70 kişi olunca Josephus 1. sıraya gelmelidir. Bu

Üç Boyutlu Hayal Gücü