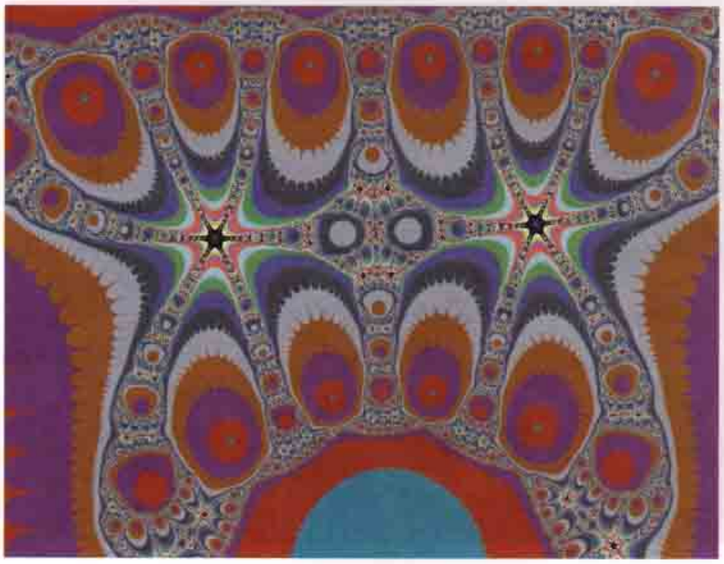
Fraktallar Dünyasında Küçük Bir Gezinti

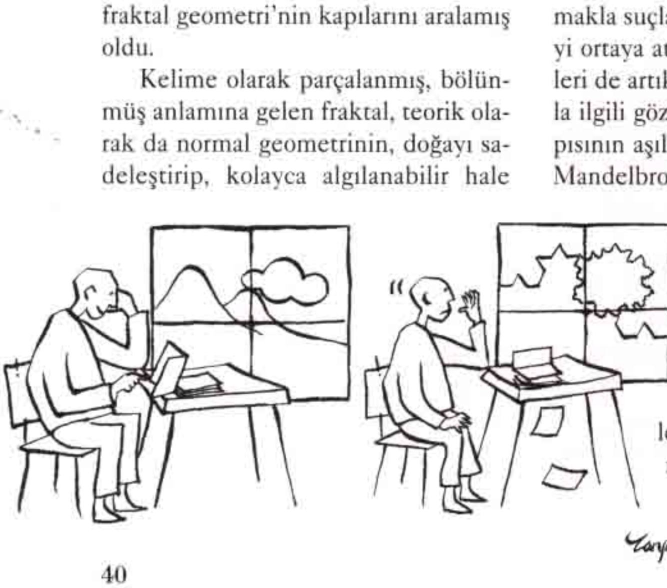


"Fraktal Geometri, herşeyi farklı görmenize neden olacak. Bu yazıya devam etmek sizin için tehlikeli olabilir.Bulutlara, ormanlara, galaksilere, yapraklara, içeceklere, kayalara, dağlara, sellere, halılara ve daha birçok nesneye karşı çocukluğunuzdan beri sahip olduğunuz bakış açınız kaybolabilir ve hiçbir zaman da eski halini almayabilir." İşte böyle başlıyor M. Barnsley, Fraktallar Heryerde (Fractals Everywhere) adlı kitabına. Pek de haksız sayılmaz bu uyarısında, ancak bu sözler uyarı değil bizce. Daha çok matematiğe, doğaya, bilime ilgi duyan, içindeki öğrenme isteğini doyurmaya çalışan insanlara bir davet. Biz de sizleri, bu yazının satırları arasında bir yolculuğa davet ediyoruz; eminiz ki ilginizi çekecektir.

FRAKTAL GEOMETRİ oldukça yeni bir alan. Bu teorinin temel aldığı fikirler önceleri G. Cantor, G. Peano, D. Hilbert, H. Koch, W. Serpinski gibi matematikçiler tarafından ortaya atılmıştı fakat ilk olarak bu fikirleri biraraya getiren ve bunların yeni bir matematik alanına açılan kapının anahtarları olduğunun farkına varan Bénoit Mandelbrot oldu. Mandelbrot, 1977 yılında yazdığı "Fractals: Form, Chance and Dimensions" adlı kitabında bilim tarihinde ilk kez "fraktal" kelimesini kullandı ve fraktal geometri'nin kapılarını aralamış oldu.

Kelime olarak parçalanmış, bölünmüş anlamına gelen fraktal, teorik olarak da normal geometrinin, doğayı sadeleştirip, kolayca algılanabilir hale getirerek "sonlu" ögelere indirgeme mantığına aykırıdır.

Gerçekte de doğa, Euclides geometrisinin getirdiği kavramlara uygun bir düzen göstermez. Çevremizde ne doğrusal hareket eden cisimler, ne gerçek küreler ne de prizmalar vardır. Zaten Newton mekaniğine cevap veren Euclides geometrisi, 20. yüzyılda hızla gelişmekte olan yeni anlayışların da gerisinde kalıyordu. İşte bu koşullar altında ortaya çıkan ve meyve vermeye başlayan bu yeni geometri anlayışı da birçok yeni fikir gibi ilk başta garipsendi ve hatta birçoklarınca "patolojik" olmakla suçlandı. Başlarda bu yeni teoriyi ortaya atan matematikçilerin kendileri de artık klasik matematiğin doğayla ilgili gözlemlerle sınırlandırılmış yapısının aşıldığını belirtiyorlardı. Ancak Mandelbrot daha sonra bunun böyle olmadığını ve matematikçilerin doğanın bir oyununa geldiklerini söyledi. Ona göre bu yeni matematiksel fikirlerde bulunan, doğanın sınırlarını yıktığı düşünülen birçok öğe, aksine doğanın tamamen içinden gelmekteydiler.



İşte bu tartışmalar ve heyecanlar içinde olgunlaşmaya başlayan fraktal geometri teorisi tarih olarak bakıldığında oldukça yeni ve hâlâ oldukça gizemli. Ancak bugün biliyoruz ki fraktallar evrende her zaman vardılar ve buradan sonra da olacaklar. Ancak insanoğlu doğanın başka birçok sırrında da olduğu gibi fraktalların da farkına yeni yeni varıyor.

"Pirenin biri
olmuş daha küçük pirelerin yemi.
Var o küçük pireleri de ısıranlar,
Hikâyemiz sürer böyle
sonsuza kadar."

Jonathan Swift

Fraktalları basitçe, sonsuza kadar kendini tekrarlayan, içiçe geçmiş şekiller olarak tanımlayabiliriz. Bu tanım örnekler sonunda daha iyi anlaşılacaktır fakat matamatiksel olarak pek birşey ifade etmez. Ancak fraktalların bugüne kadar verilmiş öyle kesin bir tanımı da yok. Zaten şu anda bizim için bu kadarı yeterli. Şimdi birkaç fraktal örneği verelim ve kafanızdaki soru işaretlerinin bir kısmını dağıtalım. İşe en temel ve kolay anlaşılabilir olanı yani Cantor Kümesi ile başlayalım.

Fraktalımızı oluşturmaya [0,1] aralığı ile başlayalım ([a, b]; reel sayı ekseninde a ile b arasında, a ve b de dahil, tüm reel sayıların kümesini ifade eder). [0,1] aralığını E_0 olarak tanımlayalım. E_1 ise E_0'ın ortasındaki üçte birlik kısmının silinmesi ile elde edilen küme olsun. Yani E_1 iki aralığın birleşiminden oluşur :

[0,1/3]U[2/3,1]Bu aralıklara da aynı işlemin uygulanması ile E_2 elde edilir. Dolayısıyla E_2,

[0,1/9]U[2/9,1/3]U[2/3,7/9]U[8/9,1]

kümesi olur. Bu şekilde, E_{k-1} kümesinin her bir parçasının tam ortasındaki üçte birlik kısmının silinmesi ile E_k kümesini elde ederek devam edelim. Böylece E_k kümesi, her birinin uzunluğu 3^{-k} olan 2k tane kümeden oluşur. Eğer Cantor kümesini F ile gösterirsek, F; k sıfırdan sonsuza kadar tüm tamsayı değerleri alırken E_k kümelerinin kesişimi olarak tanımlanır. Yani "[0,1] aralığındaki reel sayılardan, her k pozitif

tamsayısı için E_k'nin elemanı olanlar". F kümesi, E_k dizisinin sonsuzdaki limiti olarak da düşünülebilir. Dolayısıyla F kümesinin kendisini çizmek imkânsızdır. Ancak bazı yaklaşımları çizilebilir ve k ne kadar büyük olursa çizilen şekil F'ye o kadar benzer.

İlk bakışta, F kümesini elde edebilmek için [0,1] aralığından o kadar çok sayıyı sildik ki sonunda elimizde hiçbir şey kalmayacaktır diye düşünebilirsiniz. Fakat gerçekte F sonsuz (ve sayılamaz) elemanlı bir kümedir ve herhangi bir elemanın, herhangi bir komşuluğunda sonsuz sayıda eleman içerir. Gerçekte F kümesi, [0,1] aralığında bulunan ve 3 tabanındaki yazılımında "1" içermeyen tüm sayıları eleman olarak bulundurur. Yani

$$a_1 3^{-1}+a_2 3^{-2}+a_3 3^{-3}+...$$

şeklinde yazıldığında, her i için $a_i=0$ ya da $a_i=2$ olan [0,1] aralığındaki tüm sayılar F'nin elemanıdır.

Bunun ispatını burada vermiyoruz fakat matematikle biraz ilgilenen herkesin yapabileceğini belirtip tümevarım yöntemini de ipucu olarak vermekle yetiniyoruz.

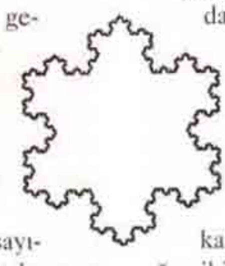
Şimdi Cantor kümesinin bazı özelliklerini belirtelim. Bunlar aynı zamanda daha birçok fraktalın da sahip olduğu özelliklerdir.

a) F kümesi kendine benzer alt yapılardan oluşur. Örneğin F'nin [0,1/3] aralığındaki kısmı ve [2/3,1] aralığındaki kısmı F'ye geometrik olarak benzerdiler ve F ile aralarında 1/3'lük bir benzerlik oranı vardır. Aynı şekilde E_2'nin dört parçası da F'ye benzerdir, şu farkla: benzerlik oranı 1/9'dur. Dolayısıyla şöyle söyleyebiliriz: Cantor kümesi kendisinin değişik boyutlardaki kopyalarından oluşur.

b) F ne kadar büyütülürse büyütülsün, sonsuz küçük ayrıntılara sahiptir. Fakat F son derece basit bir şekilde tanımlanır.

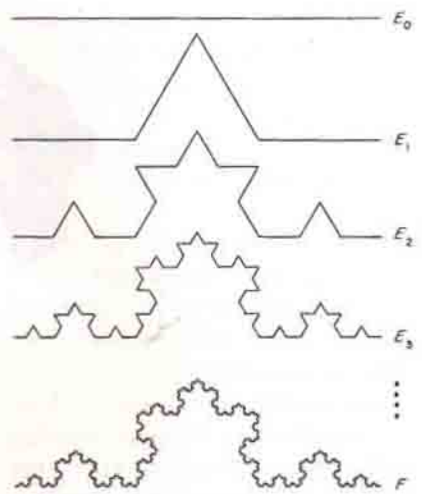
c) F kümesine indirgemeli bir bağıntı ile ulaştık ve indirgemenin her basamağında F'ye daha yakın bir küme elde ettik.

d) F kümesinin basit bir geometrik açıklaması verilemez. Geometrik olarak belli bir özelliği taşıyan noktaların geometrik yeri olmadığı gibi herhangi bir denklemin çözüm kümesi de değildir.



e) F kümesi çok geniş (sayılamayan sonsuz) bir küme olmasına karşın büyüklüğü normal ölçülerde belirlenemez. Örneğin büyüklüğe uzunluk olarak baktığımızda, F kümesinin uzunluğu (reel eksende) sıfırdır.

13. yüzyılda Fransa'da basılan bir İncil'in kapak resmi.



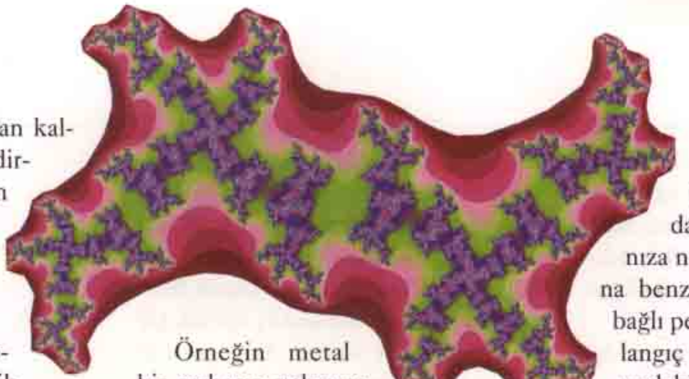
Tüm bu özellikler bize, fraktalların ne kadar ilginç ve bizim normal geometri anlayışımıza ne kadar ters olduklarını gösteriyor.

Şimdi biraz daha gelişmiş ve göze daha hoş gelen bir örnek verelim: Koch eğrisi.

E_0'ı bir birim uzunluğunda bir doğru parçası olarak tanımlayalım. E_1 ise E_0'ın ortasındaki üçte birlik kısmını atıp yerine bu parçayı taban kabul eden eşkenar üçgenin diğer iki kenarını koyarak elde ettiğimiz şekil olsun. E_2'yi ise, aynı işlemi E_1'in dört parçasının her birine ayrı ayrı uygulayarak elde edelim ve bu şekilde devam edelim. Sonuçta E_k, E_{k-1}'in her parçasına yukarıdaki işlem uygulanarak elde edilmiş olur. k büyüdükçe E_{k-1} ile E_k sadece çok küçük ayrıntılarda birbirlerinden farklı olurlar ve k sonsuza gittiğinde ise E_k dizisi bir F limit eğrisine yaklaşır ki işte bu eğri Koch Eğrisi olarak adlandırılır. Koch eğrisi de yukarıda Cantor kümesi için sıralanan özelliklerden birçoğuna sahiptir. Burada her parça bütünün $(1/3)^k$ oranında küçültülmüşüdür, ancak bazı yansımalara sahiptir. Dikkat edilirse, her işlem sonunda elde edilen doğru parçalarının toplam boyu, bir önceki durumun 4/3 katıdır. Yani E_k'nin toplam boyu $(4/3)^k$ şeklinde formüle edilebilir. Bu durumda k sonsuza gittiğinde E_k'nin boyu da sonsuza gider.

Burada E. Cesàro'nun Koch eğrisi için söylediklerini hatırlatmadan geçemeyeceğiz:

"Eğer ona (Koch eğrisine) hayat verilebilseydi, onu yokedebilmek için tamamını bir anda ortadan kaldırmamız gerekirdi. Aksi takdirde, her seferinde üçgenlerinin derinliklerinden kendini tekrar ve tekrar sonsuza dek doğurabilir. Tıpkı evrendeki hayat gibi".



Doğrusu Koch eğrisini görüp de onun içinde bir dinamikliğin, bir canlılığın farkına varmamak imkânsız. Fakat asıl ilginç olan bu canlılığın, bu sonsuza kadar dur durak bilmeden kendini tekrar edişlerin doğada da bulunması. Doğanın insanlara sürekli sürprizler yapması ve sırlarını yavaş yavaş, tadını çıkarta çıkarta insanlara açması, onlarla paylaşması. İşte insana asıl heyecan veren, insanı matematiğin derinliklerine çeken bu.

"Bilim adamlarının doğayı incelemelerinin nedeni bundan bir yarar beklemeleri değil, bundan zevk almalarıdır. Bundan zevk alırlar çünkü doğa güzeldir. Eğer doğa güzel olmasaydı, hakkında bilgi edinmeye değmezdi ve eğer doğa bilgi edinmeye değmeseydi, hayat yaşamaya değmezdi".

Henri Poincaré

Fraktallar da matematikçilerin ilgi çekmek için ortaya attıkları garip şekiller değil, bazı doğal olayları açıklamak için kurulan modellerin çözüm uzaylarıdır.

Örneğin metal bir sarkacın yakınına onu etkileyecek şekilde iki mıknatısı öyle koyalım ki sarkaç salındıktan sonra bu iki mıknatıstan birinin üzerinde dursun. Bu mıknatıslardan birini mavi mıknatıs, diğerini de kırmızı mıknatıs olarak adlandıralım. Şimdi sarkacın hangi konumlardan bırakıldığında mavi mıknatıs, hangi konumlardan bırakıldığında da kırmızı mıknatıs üzerinde durduğunu inceleyelim. Sarkacı salınıma bırakmak üzere tuttuğumuz başlangıç noktasından sarkacın ipi boyunca hayali bir çizgi çizelim ve bu çizginin mıknatısların bulunduğu yatay düzlemi kestiği yere bir işaret koyalım. Daha sonra sarkacı bırakalım. Sarkaç salınımını tamamlayıp durduğunda eğer mavi mıknatıs üzerinde ise o noktayı maviye boyayalım. Kırmızı mıknatısın üzerinde durursa o noktayı kırmızıya boyayalım. Düzlemdeki bütün noktaları bu yolla mavi ya da kırmızıya boyadığımızı düşünelim. İşte sonuçta elde edilen şekil sizin de tahmin edeceğiniz gibi bir fraktal. Bu örnek, fraktallara artık daha farklı bir açıdan bakmanıza neden olmuştur herhalde. Buna benzer şekilde, iki parametreye bağlı pek çok doğal oluşum için başlangıç parametreleriyle sonuç arasındaki ilişkiyi düzlemde belirtmeye kalktığınız zaman yukarıdaki örnekte olduğu gibi karşınıza fraktallar çıkar.

"Oysa bir ilişki ortaya çıkmaktadır.
Kum üstüne bir bulutun,
yamaçta bir şeklin gölgesi gibi yayılan
bir küçük ilişki."

Wallace Stevens

".... evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan, anlaşılamaz. Evren matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, çemberler ve başka geometrik şekillerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılamaz; bunlarsız evreni anlamaya çabalayan insan, karanlık bir labirentte başıboş dolaşıyor demektir."

Bu sözler, Mandelbrot'un fraktallarla ilgili düşüncelerini ortaya atmasından tam 350 yıl önce Galileo tarafından söylenmişti. Gerçekten de, Mısır hiyeroglifleri üzerinde çalışan bir arkeolog için bir sembol ne kadar

Bilgisayarlar ve Fraktallar

Fraktallar üzerine çalışma yapan matematikçilerin en büyük yardımcıları bilgisayarlar olmuştur. Bunun sebebi fraktalların elle çiziminin neredeyse imkânsızlığı ve buna karşılık bilgisayar kullanarak fraktal oluşturmanın oldukça kolay oluşudur. 10-15 satırlık bir BASIC programıyla çok değişik fraktallar yaratabilir ve başlangıç verilerinde yaptığınız değişikliklerin oluşan fraktal üzerine nasıl etkidiğini çok kısa sürede görebilirsiniz.

Birçoklarına göre Mandelbrot'un fraktal teorisini geliştirirken en büyük avantajlarından biri IBM'de çalışıyor olmasıydı. Bu sayede zamanının en gelişmiş bilgisayarlarını kullanabilmiş, ortaya attığı sorulara kafasında canlandırdığı cevapların birer modelini bilgisayar çıktısı olarak alabilmiş ve bu ona çok daha sağlıklı araştırmalar yapma fırsatını vermiştir.

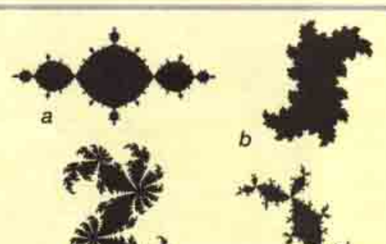
Fraktalların ve matematiğin daha birçok başka dalının bilgisayar uygulamalarının oluşu, son dönemlerde matematikçilerin bilgisayara daha fazla yaklaşmalarına ve onunla daha fazla çalışmalarına neden olmuştur. Günümüzde, nasıl ki fizikçiler, kimyagerler ya da biyologlar laboratuvar çalışması yapıyorlarsa matematikçiler de -tam onlarınki gibi olmasa da- bilgisayarlarının başında bir nevi laboratuvar çalışması yapmaktadırlar.

Artık tüm dünyadaki gelişmelere paralel olarak ülkemizde de bilgisayar kullanımı oldukça yaygınlaştı. Birçok insanın kendi evinde, okulunda ya da işyerinde bilgisayara ulaşma şansları var. Ancak bu gelişmelere paralel olarak yeni bir eğitim programı henüz benimsenmiş değil.

Birçok Avrupa ülkesi ve Amerika'da bilgisayarlar daha ilkokuldan itibaren eğitim sisteminin bir parçası haline gelmiş durumda. Tabii ki gelişen matematikle beraber matematik eğitimi de günün koşullarına ayak uydurmak ve öğrencileri dünyanın gerçeklerinden ve yeni anlayışlardan haberdar olarak yetiştirmek zorunda. Bunda en iyi ve etkili olarak kullanılabilcek materyallerinden biri de fraktallar sanırız.

Hem estetik oluşları hem de matematiksel anlamda önemli oluşları onlara bu özelliği kazandırıyor.

```
REM JULIA
INPUT "C1"; C1
INPUT "C2"; C2
CLS
SCREEN 1
   FOR M=0 TO 200
   X0=-2+M/50
   FOR N=0 TO 100
   YO=2-N/50
   X=X0
   Y=Y0
   FOR I=1 TO 20
      X1=X*X-Y*Y+C1
      Y1=2*X*Y+C2
      X=X1
      Y=Y1
      Z=X*X+Y*Y
      IF Z>4 THEN GOTO 10
      NEXT I
   PSET (M,N)
   PSET (200-M, 200-N)
10 NEXT N
NEXT M
END
```



Yandaki programda C1 karmaşık sayının reel kısmını C2 de sanal kısmını oluşturmak üzere, aşağıdaki verilere göre girdiğiniz c karmaşık sayılarına karşılık çıkan ve matematikçiler tarafından JULİA olarak adlandırılan fraktal görüntüleri yukarıdaki gibidir.

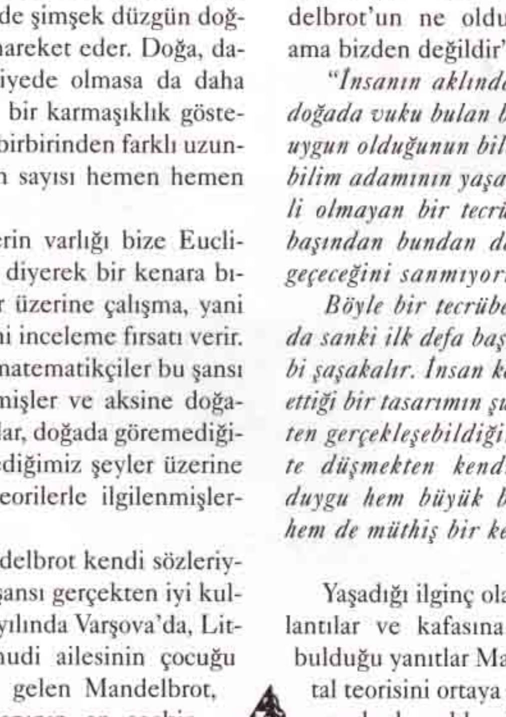
(a) c=-1,
(b) c=0.3-0.4i,
(c) c=0.360284+0.100376i
(d) -0.1+0.8i

önemliyse, ne kadar çok şey ifade edebiliyorsa bilim adamları için de fraktallar o derece önemlidir. Fraktallar evrenin alfabesine yapılmış büyük bir katkıdır ve bu bizim evreni daha iyi anlamamızı sağlayacaktır. Şu ana kadar bildiklerimizle ifade edemediğimiz, kavrayamadığımız birçok nesneyi, birçok olayı artık daha kolay ifade edebileceğiz ve daha kolay kavrayabileceğiz. Mandelbrot bu konudaki görüşlerini şu sözleriyle dile getirmişti:

"Geometri neden çoğunlukla soğuk ve katı olarak tanımlanır? Bunun nedenlerinden biri geometrinin bulutların, dağların, kıyıların ya da ağaçların şekillerini ifade etmekteki acizliğidir. Ne bulutlar küresel, ne dağlar konik, ne kıyılar çembersel, ne ağaç kabuğu düzgündür, ne de şimşek düzgün doğrular boyunca hareket eder. Doğa, daha yüksek seviyede olmasa da daha farklı derecede bir karmaşıklık gösterir. Modellerin birbirinden farklı uzunluk ölçeklerinin sayısı hemen hemen sonsuzdur.

Bu modellerin varlığı bize Euclides'in biçimsiz diyerek bir kenara bıraktığı nesneler üzerine çalışma, yani şekilsizin şeklini inceleme fırsatı verir. Bugüne kadar matematikçiler bu şansı değerlendirmemişler ve aksine doğadan uzaklaşmışlar, doğada göremediğimiz, hissedemediğimiz şeyler üzerine geliştirdikleri teorilerle ilgilenmişlerdir".

Bénoit Mandelbrot kendi sözleriyle belirttiği bu şansı gerçekten iyi kullanmıştır. 1924 yılında Varşova'da, Litvanyalı bir Yahudi ailesinin çocuğu olarak dünyaya gelen Mandelbrot, Fransa'da zamanının en seçkin okullarından biri olan École Polytechnique'i bitirir. Çeşitli nedenlerle ülkesini ve matematik kariyerini terketmek zorunda kalan Mandelbrot, Amerika Birleşik Devletleri'ne göç eder. Burada IBM'in Thomas J. Watson Araştırma Merkezi'nde çalışmaya başlar. Kimsenin tanımadığı bir araştırıcı iken otuz yıllık bir yolun sonunda şöhrete kavuşmasına ve ömrü boyunca birçok bilim dalında çalışma yapmış olmasına rağmen bilim camiasının hiçbir cephesinden asla kabul görmez. Matematikçiler bile, açık bir kötü niyet ifadesi olmadan, "Mandelbrot'un ne olduğunu bilemeyiz, ama bizden değildir" derler.



"İnsanın aklından geçen bir şeyin doğada vuku bulan bir olaya tamamen uygun olduğunun bilincine varmak bir bilim adamının yaşadığı öyle eşi emsali olmayan bir tecrübedir ki, hayatta başından bundan daha güzel bir şey geçeceğini sanmıyorum.

Böyle bir tecrübeyi her yaşadığında sanki ilk defa başına geliyormuş gibi şaşakalır. İnsan kendi zihninde inşa ettiği bir tasarımın şu dünyada hakikaten gerçekleşebildiğini görünce hayrete düşmekten kendini alamaz. Bu duygu hem büyük bir şok gibi gelir hem de müthiş bir keyif verir."

Leo Kadanoff

Yaşadığı ilginç olaylar, değişik rastlantılar ve kafasına takılan sorulara bulduğu yanıtlar Mandelbrot'un fraktal teorisini ortaya atmasını sağlayan nedenler oldu. Birçok meslektaşınca kimi konularda eleştirilmesine karşın Mandelbrot, dünyada pek az bilim adamının yaşayabildiği bir duyguyu yaşamış ve doğada o ana kadar kimsenin farkına varamadığı bir düzenin farkına varmıştır.

Mandelbrot şöyle bir soruyla karşılaşmıştı: "İngiltere sahillerinin uzunluğu nedir?" Bu soruya genelde iki yanıt verilir: "Bilmiyorum, benim konum değil." ya da "Bilmiyorum, ama ansiklopediye bakıp araştırırım".

Mandelbrot'un iddiası ise aslında her sahilin -bir bakıma- sonsuz olduğuydu. Bir başka bakış açısından, bu sorunun yanıtı elinizde tuttuğunuz cetvelin uzunluğuna bağlıydı. Örneğin elinizde açıklığı 1 metre olan bir pergel olsun. Bu pergeli sahil boyunca yürüttüğünüz taktirde sonuçta elinize bir uzunluk geçer. Ancak bu hiç de hassas bir ölçüm olmaz. Eğer aralığı yarım metreye indirirseniz daha hassas bir sonuç elde edersiniz ama bu sonuç da gerçek uzunluktan uzak kalacaktır. Pergelin aralığını ne kadar küçük tutarsanız elde edeceğiniz sonuç sahilin gerçek uzunluğuna o kadar yaklaşacaktır. Sahil, Euclides geometrisindeki şekillerden birinde, meselâ daire şeklinde olsaydı, gittikçe daha küçülen doğru parçalarını bir araya toplama yöntemiyle yapılan ölçümler gerçekten de sonunda birleşirdi. Mandelbrot'un buluşuna göre, bir ölçek küçüldükçe ölçülen şekil uzunluğu sınırsız olarak artmakta, körfez ve yarımadalardan, daha da küçük körfezcikler ve yarımadacıklar çıkmakta ve bu işlem en sonda, atom ölçeğine kadar indikten sonra gerçekten sona ermektedir.

Bu ve buna benzer daha birçok problem bizleri sonsuz dizilere, benzerliklere, tekrarlara ve kaçınılmaz bir şekilde fraktallara götürüyor. Fraktallar doğayı açıklama konusunda insanoğlunun son zamanlarda attığı en önemli adımlardan biri. Umarız ki, bu sizlerin de ilgisini çekmiştir. Bunu yazıdan başınızı kaldırıp çevrenize şöyle bir baktığınızda daha iyi anlayabilirsiniz. Eskiden gördüğünüz dünya artık yerinde durmuyor değil mi?

Deniz Gündüz

Kaynaklar

Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*, Academic Press Lmt., 1993

Devaney, R. L., *Chaos, Fractals and Dynamics*, Addison-Wesley, 1990

Falconer, K., *Fractal Geometry*, J. Wiley & Sons, 1990

Gleick, J., *Kaos: Yeni Bir Bilim Teorisi*, TÜBİTAK, 1995

Kaye, B. H., *A Random Walk Through Fractal Dimensions*, VCH, 1989

Kurtuluş, Ö., "Doğadaki Geometri", Bilim ve Teknik, Nisan 1995

Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., 1983

Peitgen, H.O., Richter P.H., *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986

Sertöz, S., *Matematiğin Aydınlık Dünyası*, TÜBİTAK, 1996