Ali Doğanaksoy
matematik.havuzu@tubitak.gov.tr

SERBEST STİL: HARMONİK SAYILAR

Bu sayımızda $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ toplamını, yani 1'den başlayarak pozitif tam sayıların çarpmaya göre terslerinin toplamını ele alacağız. Tanımlanma şeklinden bu toplamın gittikçe büyüdüğü fakat büyüme miktarının gittikçe azaldığı görülüyor. Örneğin toplamdaki büyüme ilk 999 terimden sonra 0,001, ilk 999.999 terimden sonra ise 0,000001 olacaktır. Fakat bu yavaşlık onu sınırlamaz. Bir başka deyişle bu toplam "yavaş yavaş ama sınır tanımadan büyümektedir". Yani ne kadar büyük bir pozitif sayı alırsanız alın, toplam eninde sonunda aldığınız sayıdan daha büyük bir değere ulaşacaktır. Bunu görebilmek için toplamı biraz daha yakından inceleyelim.

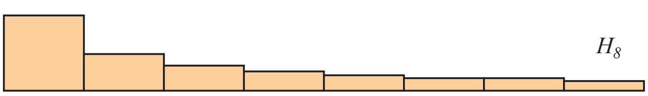
$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\substack{\text{en küçüğü } \frac{1}{4} \text{ olan 2 terim} \\ \left(\text{toplamın değeri} > \frac{1}{2}\right)}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\substack{\text{en küçüğü } \frac{1}{8} \text{ olan 4 terim} \\ \left(\text{toplamın değeri} > \frac{1}{2}\right)}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{\substack{\text{en küçüğü } \frac{1}{16} \text{ olan 8 terim} \\ \left(\text{toplamın değeri} > \frac{1}{2}\right)}}+\frac{1}{17}+\cdots$$

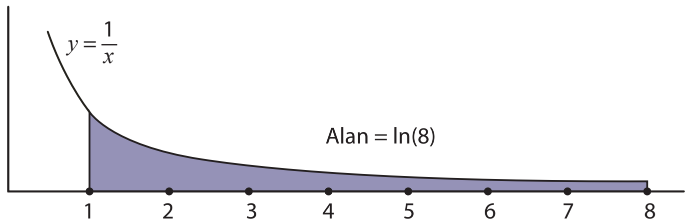
Toplamın ilk terimi 1, ilk iki terimin toplamı $3\cdot\frac{1}{2}$'dir. İlk dört terimin toplamı $4\cdot\frac{1}{2}$'den, ilk sekiz terimin toplamı $5\cdot\frac{1}{2}$'den, ilk 16 terimin toplamı $6\cdot\frac{1}{2}$'den büyüktür. Bu şekilde devam ederek ilk 2^k terimin toplamının $(k+2)\cdot\frac{1}{2}$'den büyük olduğu görülebilir. O halde ilk 2^k terimin toplamı $\frac{k+2}{2}$'den büyük olur. Örneğin ilk 2^{198} terimin toplamı 100'den, ilk 2^{1998} terimin toplamı 1000'den büyüktür. Toplamın sınır tanımaksızın büyüdüğünü göstermek için yukarıda yaptığımız hesaplama doğru olsa da ekonomik değildir. Yani dizinin ilk 2^{198} teriminin toplamının 100'den büyük olduğunu söylerken biraz garantici davranmış oluyoruz. Aslında toplamın 100 sayısını geçmesi için ilk 2^{143} terimin toplanması yeterlidir.

Toplamın yavaş yavaş ama sınır tanımadan büyüdüğünü söylemiştik. Sınır tanımadan büyüdüğünü anlamış olduk. Şimdi de yavaş yavaşı anlayalım. İlk dört terimi topladığımızda toplam 2'den büyük olur. İlk 11 terimde 3, ilk 31 terimde 4, ilk 83 terimde 5 sayısı aşılmış olur. Toplamın 10'u aştığını görebilmemiz için ilk 12.367 terimin toplanmasını beklememiz gerekecektir. Saniyede 1.000.000 işlem yapabilen bir işlemci bir sene boyunca aralıksız çalıştığında toplamın ancak 31'i aştığını görebiliriz. Makul bir sürede, söz gelimi 1000 senede toplamın 70 olduğunu görebilmemizi sağlayacak hızda işlem yapabilecek bir teknoloji henüz yok.

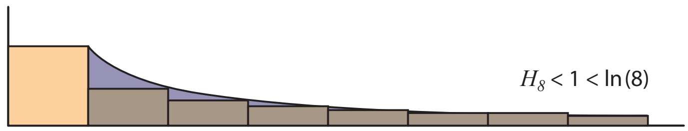
Toplamın ilk n teriminin toplanması ile elde edilen sayıya n. harmonik sayı adı verilir ve H_n ile gösterilir. Birçok uygulama sahasında önemli rol oynayan harmonik sayıların nasıl hesaplanabileceğine değineceğiz. Her birinin taban uzunluğu 1, yükseklikleri $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$ olan dikdörtgenlerin alanlarının toplamı H_8'e eşittir.



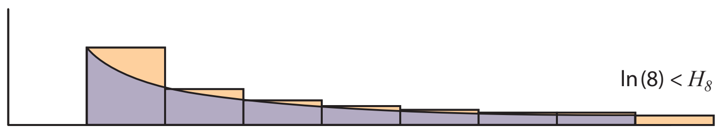
$x=1$'den $x=8$'e kadar $y=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği ile x– ekseni arasında kalan bölgenin alanı da $\ln(x)$ (doğal logaritma fonksiyonu) olarak tanımlıdır.



İki şekil birlikte çizildiğinde $H_8 < 1+\ln(8)$ olduğu görülür.



Aynı şekil biraz farklı çizildiğinde ise $\ln(8) < H_8$ olduğu görülür.



Sonuç olarak $\ln(8) < H_8 < 1+\ln(8)$ eşitsizliklerini elde ederiz ki bunun genel hali olan $\ln(n) < H_n < 1+\ln(n)$ eşitsizlikleri de her $n \geq 2$ tam sayısı için geçerlidir. Böylece H_n'yi hesaplamak için etkin bir yol bulmuş olduk. Örneğin H_{100}'ü hesaplamak istediğimizde $\ln 100 = 4{,}605\ldots$ olduğundan $4{,}605 < H_{100} < 5{,}605$ yazabiliriz. Buradan H_{100}'ün yaklaşık olarak 5,1 civarında bir sayı olduğunu tahmin edebiliriz. Nitekim $H_{100} = 5{,}1873\ldots$'tür.

$\ln(n)$ ile $\ln(n)+1$ sayıları arasında bulunduğunu bildiğimiz H_n için yaklaşık bir değer olarak $\ln(n)+\frac{1}{2}$'yi kullanmak makuldür. Ancak Euler n sayısı büyüdükçe $H_n - \ln(n)$ farkının gittikçe sabit bir sayıya yaklaştığını göstermiştir. Euler sabiti adı verilen ve γ ile gösterilen bu irrasyonel sayının yaklaşık değeri 0,57721'dir. O halde
$H_n \approx \ln(n) + 0{,}57721$ yazarak, H_n için yaklaşık bir değer olarak
$\ln(n) + 0{,}57721$'in kullanılabileceğini ifade edebiliriz.
Örneğin $H_{100} \approx 5{,}18238\ldots$ gibi.

DUYURU

Değerli okurlarımız, bu sayıdan itibaren Eğlence Havuzu ve Olimpik Havuz köşelerinde yer alan problemleri doğru çözenlerin isimlerini yayımlamaya başladık. Listede yer almak için çözümlerinizi soruların yayımlandığı ayın ilk 15 günü içinde, sayfa başlığında verilen internet adresine göndermeniz gerekiyor. Okurlarımızdan gelen dikkate değer çözüm önerilerini de ayrıca yayımlayacağız.

KUM HAVUZU

KAYNAMIŞ YUMURTA Yumurtanızı tam 15 dakika kaynatmak istiyorsunuz. Biri 7 diğeri 11 dakikalık iki kum saati kullanarak bunu nasıl yapabilirsiniz?

BİSİKLET Bir kısmı 2 diğerleri de 3 tekerlekli olmak üzere 14 bisikletin toplam 37 tekerleği olduğu biliniyor. Üç tekerlekli bisikletlerin sayısı sizce kaçtır?

EĞLENCE HAVUZU

BİLEK GÜREŞİ Yedişer kişiden oluşan iki takım arasında bilek güreşi maçları yapıldı. Turnuva sonunda her oyuncu yaptığı toplam maç sayısını tahtaya yazdı. Tahtada 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6 sayıları var. Bir şey yanlış görünüyor, ama ne?

ATEŞ İLE GÜNEŞ Ateş ile Güneş hilesiz birer zar atıyor. Gelen zarlardan küçük olan büyük olandan çıkarılıyor. Sonuç 0, 1 veya 2 ise Ateş, 3, 4 veya 5 ise Güneş kazanıyor. Sizce bu oyun adil mi? Oyun çok sayıda tekrarlanırsa kimin daha çok kazanması beklenir?

MATEMATİKÇİ MANAV Bir manav, iki kefeli bir terazi ve 4 adet ağırlık ile 1 kilodan 40 kiloya kadar (ağırlığı bir tam sayı ile ifade edilebilen) her şeyi tartabiliyor. Manavın elindeki 4 ağırlık nelerdir?

OLİMPİK HAVUZ

KARELİ TAHTADA ÇARPMA 9 x 9 boyutlarındaki bir satranç tahtasındaki 81 karenin içine 1 ya da –1 yazılmış. Her kare için, bu kare ile ortak kenara sahip karelerde yazan sayıların çarpımı hesaplanıyor. Her hamlede aynı anda karelerdeki tüm sayılar, bu çarpımlarla değiştiriliyor. Başlangıçtaki sayılar ne olursa olsun, sonlu adım sonunda tüm karelerde 1 yazan durum elde edilebilir mi?

NOKTADAŞLIK Bir *ABC* üçgeninin *A* açısının dış açıortayı, *BC* kenarına *B*'den ve *C*'den çizilen dikleri, sırasıyla *D* ve *E* noktalarında kesiyor. *O*, *ABC* üçgeninin çevrel çember merkezi olmak üzere, *BE*, *CE*, *AO* doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

Ali Doğanaksoy *matematik.havuzu@tubitak.gov.tr*

GEÇEN AYIN ÇÖZÜMLERİ

Kum Havuzu

100 KARINCA

Karıncaları birbirlerinden ayırt etmiyoruz. Bu nedenle iki karıncanın karşılaşınca yönlerini değiştirip zıt yönde yürümeye devam etmesini, karıncalar birbirlerinin içinden geçip hiç yön değiştirmeden yollarına devam ediyormuş gibi düşünebiliriz. Buna göre, başlangıç konumları ne olursa olsun en fazla 1 dakika sonunda çubuk üzerinde hiç karınca kalmaz.

KARINCAYİYEN

Kahverengi karıncayiyenin yeşil bir karıncayiyenle, siyah karıncayiyenin de mavi bir karıncayiyenle beraber dolaştığını kabul edelim. Kahverengi karıncayiyenin karşılaşıp da yiyemediği her karıncayı yeşil karıncayiyen, siyah karıncayiyenin karşılaşıp da yiyemediği her karıncayı mavi karıncayiyen yesin. Kahverengi karıncayiyenin siyah karıncayiyenden daha fazla karınca yediği her durumda yeşil karıncayiyen maviden daha az karınca yer. Aynı şekilde kahverengi karıncayiyenin siyahdan daha az karınca yediği her durumda da yeşil karıncayiyen maviden daha fazla karınca yer. Kahverengi olanın siyah olandan daha fazla karınca yemesi ile yeşil olanın mavi olandan daha fazla karınca yemesi, eşdeğer olaylar olduğundan, olasılıkları eşittir. Bu olaylar birbirinin tümleyeni olduğundan her birinin olasılığı da $\frac{1}{2}$ olur.

Eğlence Havuzu

HALAY ÇEKEN KARINCALAR

Karıncalardan birini kırmızı, diğerlerini siyah kabul edelim. Kırmızı karıncanın bulunduğu grup k karıncadan oluşuyorsa, kendisi dışındaki $k-1$ karınca, toplam $n-1$ karınca arasından $C(n-1, k-1)$ farklı şekilde seçilmiş olur. Bir kez bu seçim yapıldıktan sonra kırmızı karıncanın içinde bulunduğu grup halka formuna $(k-1)!$ farklı şekilde, geri kalan $(n-k)$ karınca ise $(n-k-1)!$ farklı şekilde girebilir. Sonuç olarak karıncaların bu durumda gruplaşıp iki halay grubu oluşturması

$$C(n-1, k-1)\cdot(k-1)!\cdot(n-k-1)! = \frac{(n-1)!}{n-k}$$

farklı şekilde olabilir.

$k = 1, 2, ..., n-1$ için elde edilen sayıları topladığımızda

$$(n-1)!\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+2+1\right)$$

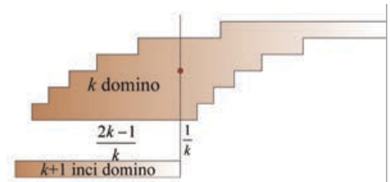
elde ederiz ki, bu da aradığımız sayının

$(n-1)!\,H_{n-1}$ olduğunu ifade eder. 14 karınca için bu sayı $13!\,H_{13} = 19.802.759.040$ dir.

DOMİNO KULESİ

Mümkün olan en büyük açıklığa ulaşabilmemiz için kulenin en üstündeki $k-1$ dominonun oluşturduğu bölümün ağırlık merkezi ile k. dominonun sağ ucu aynı hizada olmalıdır.

En üstte yer alan $k-1$ dominonun ağırlık merkezinin k. dominonun sol ucundan yatay uzaklığı 2 olduğundan, ilk k dominonun ağırlık merkezinin k. dominonun sol ucundan yatay uzaklığı da $\frac{2(k-1)+1}{k} = \frac{2k-1}{k}$ olur. Bir sonraki dominoyu yerleştirdiğimizde k. domino ile $k+1$. dominonun sağ uçları arasındaki fark da $2 - \frac{2k-1}{k} = \frac{1}{k}$ olur.



Bir başka deyişle kulenin altına $k+1$. dominoyu eklediğimizde x mesafesi $\frac{1}{k+1}$ kadar artmış olur. Kulede toplam n domino varsa $x = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} = H_{n-1}$ olur. Harmonik sayıların sınırsızlık özelliğinden, x mesafesinin istendiği kadar büyük tutulabileceği sonucuna ulaşırız.

AZİMLİ KARINCA Başlangıç noktasına göre ilk hamle sonunda karınca önce yürüyerek 1 cm uzaklaşır, daha sonra lastiğin sündürülmesi ile bu uzaklık 2 santimetreye çıkar. Karınca ikinci hamlede yürüyerek 3 santimetreye ve lastiğin sünmesiyle 4,5 santimetreye ulaşır. Şöyle bir tablo düzenleyebiliriz:

Hamle No	Hamlenin başındaki lastik uzunluğu (cm)	Hamle başında karıncanın başlangıca uzaklığı (cm)	Yürüyerek ulaştığı mesafe (cm)	Lastiğin uzama oranı	Hamle sonunda karıncanın başlangıca uzaklığı (cm)
1	100	0,00	1,00	1:2	2,00
2	200	2,00	3,00	2:3	4,50
3	300	4,50	5,50	3:4	7,33
4	400	7,33	8,33	4:5	10,42
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$100n$	d_{n-1}	$d_{n-1}+1$	$n:(n+1)$	$d_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)(d_{n-1}+1)$

Bu tablodan, sözgelimi 3. hamleden sonra lastik uzunluğunun 4 metre olduğunu ve karıncanın başlangıçtan yaklaşık 7,33 cm uzaklaşmış olduğunu (veya varmak istediği uca yaklaşık 3,93 metre uzakta olduğunu) görürüz. Tablonun n sıra numaralı satırında ise n hamle sonunda karıncanın başlangıca olan uzaklığı santimetre cinsinden d_n ile gösterilerek bir bağıntı elde edilmiştir. Bu bağıntıyı şöyle yazabiliriz:

$$d_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)(d_{n-1}+1)$$

$\{d_n\}$ dizisinin ilk birkaç terimini hesaplayalım:

$$d_1 = 2(d_0+1) = 2$$

$$d_2 = \frac{3}{2}(d_1+1) = \frac{3}{2}(2+1) = \frac{3}{1}+\frac{3}{2}$$

$$d_3 = \frac{4}{3}(d_2+1) = \frac{4}{1}+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}$$

$$d_4 = \frac{5}{4}d_3+\frac{5}{4} = \frac{5}{1}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}$$

Buradan

$$d_n = (n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right) = (n+1)H_n$$

olduğu görülür. n hamle yaptıktan sonra lastik uzunluğu santimetre cinsinden $100(n+1)$ olmuştur. Karıncanın lastiğin ucuna varmış olabilmesi için $d_n = (n+1)H_n \geq 100(n+1)$ veya $H_n \geq 100$ olması gerekir. $\{H_n\}$ dizisinin sınırsız arttığı hatırlanırsa, karıncanın lastiğin diğer ucuna erişebileceği anlaşılır. Ulaşabileceği hamle sayısı da $H_n \geq 100$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n tam sayısıdır. $H_n \approx \ln(n)+\gamma$ yaklaşık değerini kullanarak $n \approx e^{100-\gamma}$ ve buradan $n \approx 1{,}51 \times 10^{43}$ bulunur.

Olimpik Havuz

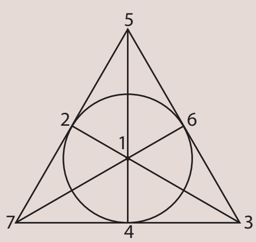
KİTAP ALIŞVERİŞİ

$k = 5$ için örnek verelim.

1	1	1	2	2	2	3	3	3	3
2	4	6	4	5	5	4	4	5	5
3	5	7	6	7	7	7	7	6	6

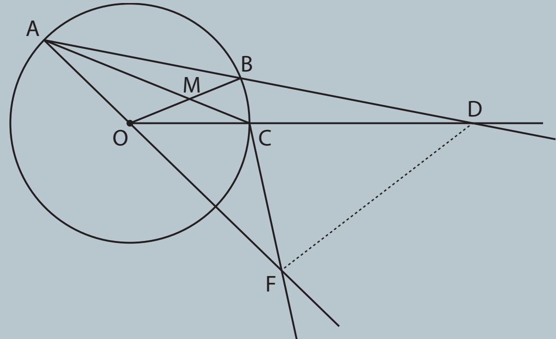
Kitapları 1'den 7'ye kadar numaralandıralım. Her sütundaki sayılar, o kişinin aldığı kitapları göstersin. Bu örnekte ilk kişi (1, 2, 3) numaralı kitapları, ikinci kişi (1, 4, 5) numaralı kitapları almıştır. Herkesin en az bir ortak kitap aldığı, diğer şekilden rahatlıkla görülebilir.

Şimdi $k < 5$ olamayacağını gösterelim. Birinci kişi diğer 9 kişiyle de ortak kitap aldığı için, birincinin aldığı kitaplardan biri toplam en az 4 kere alınmıştır. $k = 4$ olması için tüm kitapların tam olarak 4 kez alınması gereklidir. Ancak toplam kitap sayısı olan 30, 4 ile bölünemez. Sonuç olarak $k = 5$ olmalıdır.



ÇEMBERDE EŞ UZUNLUKLAR

İlk olarak $OB \parallel DF$ olduğunu görelim. M, $[OB]$ nın orta noktası olsun. AOB üçgeninde OB, BA, AO doğru parçaları C de kesiştiği için Ceva teoremini uygulayarak $\frac{|MO|}{|MB|}\cdot\frac{|DB|}{|DA|}\cdot\frac{|FA|}{|FO|} = 1$ elde ederiz. $|MO| = |MB|$ olduğu için $\frac{|DB|}{|DA|} = \frac{|FO|}{|FA|}$ yani $OB \parallel DF$ buluruz. Buradan AOB üçgeni ile AFD üçgeninin benzer olduğunu ve OBC üçgeni ile DFC üçgeninin benzer olduğunu elde ederiz. $|AO| = |OB|$ ve $|OC| = |OB|$ eşitliklerini kullanarak bu benzerliklerden $|AF| = |DF|$ ve $|CD| = |DF|$ olduğu, dolayısıyla $|AF| = |CD|$ olduğunu buluruz.



(Doğru çözüm gönderen okurumuz: Eyüp Amanvermez)

CANKURTARAN EKİBİ
Ali Doğanaksoy,
Çetin Ürtiş,
Enes Yılmaz,
Fatih Sulak,
Muhiddin Uğuz,
Zülfükar Saygı.