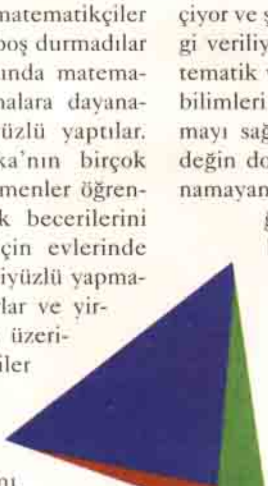
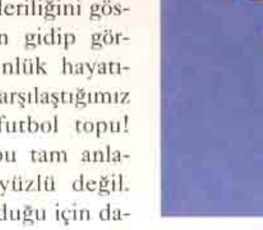
Düzgün Yirmiyüzlü Üzerine

Matematik tarihinde yıllardan beri süregelen bir tartışma vardır: Matematik, insan zekasının bir ürünü müdür, yoksa, doğada mevcuttur da matematikçiler mi bulup çıkarıyorlar? Kimi matematikçiler ilk düşünceyi, kimileri ise ikinciyi desteklemişler ve fikirlerini kanıtlamak için çaba harcamışlardır. Ama şu bir gerçek ki; her iki fikir de birbiriyle bağlantılıdır. Bunun en güzel kanıtı beş düzgün Platonik çokyüzlüden biri olan yirmiyüzlüdür.

Doğada beş tane düzgün üç boyutlunun olabileceği kanısı yüzyıllarca yıl önce insanlarda yer etmişti. Fakat niçin böyle olması gerektiğinin yanıtı verilemiyordu. Bunun için insanlık epeyce bir süre bekledi. İlk olarak Öklid'in Elemanlar adlı kitabında doğada beş tane düzgün Platonik üç boyutlunun var olabileceğinin kanıtı verildi. Bunlar; dörtyüzlü, küp (yani altıyüzlü), sekizyüzlü, onikiyüzlü ve son olarak da yirmiyüzlüydü. Yirmiyüzlü dışındaki dört düzgün çokyüzlünün doğada var olduğu biliniyordu. Yirmiyüzlü de doğada bulunmalıydı, ama nerede? Bu sorunun yanıtının bulunması için insanlık epece bir süre beklemek zorunda kaldı. Ancak matematikçiler bu süre içinde boş durmadılar ve İ.Ö. 370 yılında matematiksel hesaplamalara dayanarak bir yirmiyüzlü yaptılar. Bugün Amerika'nın birçok okulunda öğretmenler öğrencilerinin teknik becerilerini geliştirmeleri için evlerinde tek başına yirmiyüzlü yapmalarını öğütlüyorlar ve yirmiyüzlü yapımı üzerine teknik bilgiler veriyorlar.

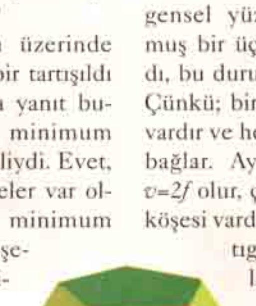


Yirmiyüzlü'nün tanımı çok kolay: Yirmi eşkenar üçgenden oluşmuş ve her köşesinde beş kenarın buluştuğu düzgün çokyüzlü! İnşası bayağı karmaşık bir üçboyutlu. Fakat eski Mısırlılar hiç üşenmeden yirmiyüzlü şeklinde bir çift zar yapmışlar. Zarlar şu anda İngiltere'de British Museum'da sergileniyorlar. Pek kullanışlı olmasalar da, o zamanlardaki matematiksel ilginin ileriliğini göstermesi açısından gidip görmeye değer. Günlük hayatımızda en çok karşılaştığımız yirmiyüzlü ise futbol topu! Fakat futbol topu tam anlamıyla bir yirmiyüzlü değil. Küre şeklinde olduğu için daha çok yontulmuş bir yirmiyüzlüyü andırıyor.



Yirmiyüzlülere, belki de matematikle çok fazla ilgisi olmadığı düşünülen moleküler biyolojide de rastlıyoruz. 19. yüzyılın sonlarına doğru, bir biyolog olan Ernst Haeckel çeşitli türleri araştırmak üzere uzun bir deniz yolculuğuna çıktı ve araştırmalarının sonuçlarını 1887'de Challenger Monograph isimli kitabında yayımladı. Kitapta birçok virus adı geçiyor ve şekilleri hakkında bilgi veriliyordu. Bu kitap, matematik ve moleküler biyoloji bilimleri arasında bir yakınlaşmayı sağladı. Çünkü o güne değin doğada varlığına rastlanamayan yirmiyüzlünün doğada varlığı bu kitapla keşfedilmişti. *Radiolaria* isimli virüs yirmiyüzlü şeklindeydi. Bu keşiften sonra bilim dünyasında başka bir soru sorulmaya başlandı. Virüsler incelendiğinde bunların çoğunlukla ya helis ya da küre yapısında olduğu görülüyordu. Küre yapısında olanların ise hemen hepsi yirmiyüzlü şeklindeydi. Neden hep bu şekiller karşımıza çıkıyordu?

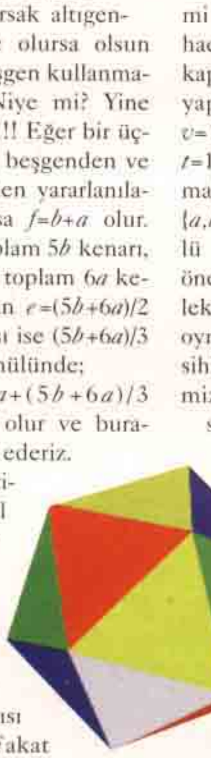
Bu soru üzerinde epeyce bir tartışıldı ve sonunda yanıt bulundu. Yanıt, minimum enerji ilkesinde gizliydi. Evet, doğada tüm maddeler var oldukları ortamda minimum enerji harcayacak şekilde şekillerini simetrik olarak ayarlıyorlardı. Küre şeklinde olan virüsler için en uygun şekil ise yirmiyüzlüydü. Helis şeklindeki virüsler için ise en uygun bileşen altıgendi. Yani bir küre yirmiyüzlülerle, bir helis ise altıgenlerle tam olarak kaplanabiliyordu.



Peki niçin bir küre yirmiyüzlülerle tam olarak kaplanabilir de, altıgenler ya da beşgenlerle kaplanamaz? Bunun yanıtı da 300 yıl öncesinden, Euler'den geliyor. Euler'in üç boyutlulara ilişkin ünlü teoremini anımsayalım: f ile üç boyutlunun yüz sayısını, v ile köşe sayısını, e ile kenar sayısını gösterirsek üçboyutlu için $f+v-e=2$ formülü geçerlidir. Altıgensel yüzlerden oluşturulmuş bir üçboyutlumuz olsaydı, bu durumda $e=3f$ olacaktı. Çünkü; bir altıgenin 6 kenarı vardır ve her kenar iki altıgeni bağlar. Ayrıca bu durumda $v=2f$ olur, çünkü; her yüzün 6 köşesi vardır ve her köşe üç altıgeni birbirine bağlar. Bu durumda; Euler teoremini uyguladığımızda $2= f+v-e=f+2f-3f=0$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla böyle bir üçboyutlu olamaz.

Fakat eğer beşgenler için bunu düşünürsek iş biraz karışır. Çünkü sadece beşgenlerle üç boyutlu yapmaya kalkarsak yine Euler teoreminden dolayı sadece 12 tane beşgen kullanabiliriz ve yaptığımız şekil ise yirmiyüzlüden çok onikiyüzlüye benzer. Onikiyüzlü ise küre kaplama işlemi için çok yetersiz kalır. Çünkü onikiyüzlü yirmiyüzlünün yarısı kadar kenara sahiptir.

Eğer beşgen ve altıgenleri birlikte kullanarak bir üçboyutlu yapmaya kalkarsak altıgenlerin sayısı ne olursa olsun tam 12 tane beşgen kullanmamız gerekir. Niye mi? Yine Euler Teoremi!!! Eğer bir üçboyutlu b tane beşgenden ve a tane altıgenden yararlanılarak oluturulursa $f=b+a$ olur. Beşgenlerin toplam $5b$ kenarı, altıgenlerin ise toplam $6a$ kenarı olduğundan $e=(5b+6a)/2$ olur. Köşe sayısı ise $(5b+6a)/3$ olur. Euler formülünde; $2=f+v-e=b+a+(5b+6a)/3-(5b+6a)/2=b/6$ olur ve buradan $b=12$ elde ederiz. Fakat elde ettiğimiz bu şekil de küreyi maksimum şekilde kaplayabilmemiz için yeterli değil. Çünkü altıgenlerin sayısı sınırlı değil. Fakat Michael Goldberg isimli bir matematikçi, buna da bir çözüm bulmuş. Bu çözüm sayesinde inşa ettiğimiz üç boyutlu, yirmiyüzlüye oldukça benziyor ve bu üçboyutluyla küreyi kaplama işlemi daha da kolaylaşıyor. Michael Goldberg'e göre küreyi kaplayabilecek bir üçboyutlu yapımı için $f=20t$, $e=30t$, $v=10t+2$ olmalı ve $t=10(a^2+ab+b^2)$ şeklinde olmalı. Bu elde edilen şekle $\{a,b\}$ tipinde yalancı yirmiyüzlü adı veriliyor. Herşeyden önemlisi bu türde sayılar Moleküler Biyolojide önemli rol oynuyorlar. Nasıl mı? Çünkü sihirli sayılar da diyebileceğimiz $t=10(a^2+ab+b^2)$ tipinde sayılar virüslerin yapısını oluşturmada anahtar rol oynuyorlar. Farklı virüslerin yapılarını oluşturmada eş protein molekülleri kullanılarak küresel bir yüzeye ulaşmak için gerekli eş protein molekül sayısı $p=10(a^2+ab+b^2)+2$. Örneğin *Herpes simplex* virüsü 162 proteine sahip, küre biçiminde ve $\{4,0\}$ tipinde.



İşte görebileceğiniz en büyük düzgün yirmiyüzlü.

Bu sayıların sihirliliği sadece bununla kalmıyor. Mesela bir küre alalım. Etrafını tamamen kaplayabilmemiz için 12 eş küre lazım. Oluşan şeklin etrafını ise 42 küre ile kaplayabiliriz. Bu şekilde devam edersek 92, 162, 252,... sayılarını elde ederiz. Hepsi de $p=10(a^2+ab+b^2)+2$ tipinde. Bir mimar olan Buckminster Fullene bu sayılardan yola çıkarak bir jeodezik kubbe -üçgenlerden oluşmuş bir küre şeklinde kubbe- inşa etmiş. Kimyagerler ise Buckminster Fullene'in yöntemini kullanarak karbon atomlarını bir araya getirmişler ve yontulmuş bir yirmiyüzlüye benzeyen bir molekül yapmışlar. Moleküle Buckminsterfullene adını vermişler.

Düzgün yirmiyüzlü'nün 59 stelasyonundan (yontulmuş hali) biri.

Anlaşılan o ki "matematik soyuttur, gerçek hayatta matematiğe rastlamak imkansızdır" savı gün geçtikçe geçerliliğini yitiriyor. Bunda da yirmiyüzlünün payı oldukça yüksek. Bakalım yirmiyüzlü daha nerelerde karşımıza çıkacak?

Burhan Biner
Bilkent Matematik Topluluğu

Kaynaklar
Stewart, I. GAME- SET and MATH, Penguin Books, Londra 1991
Coxeter, H.S.M. *Introduction to geometry*, Wiley, New York 1969
Palmer, F. *An atlas of mammalian viruses*, CRC Press, Boca Raton 1982
http://www.li.net/george/virtual-polyhedra/kepler-poinsot-info.html
http://www.geom.umn.edu:80/docs/education/build-icos.gif
http://neon.ci.lexington.ma.us/ujrosen/icos.html
http://www.teleport.com/~tpgetrys/platonics.html

Çözmece

1. $f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}, \quad n=1,2,...$

toplamı neye eşittir?

2. $ABCD$ dörtgeninde

$C\hat{D}B=C\hat{B}D=50^0$ ve

$C\hat{A}B=A\hat{B}D=B\hat{C}D$

ise $AD \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

Geçen Ayın Çözümleri

1. $2A(ABCD)=2A\Delta(AOD)+2A\Delta(DOC)+2A\Delta(COB)+2A\Delta(BOA)$
$=|AO|\,|OD|\sin\alpha+|DO|\,|OC|\sin\beta+|CO|\,|OB|\sin\gamma+|BO|\,|OA|\sin\delta$

Herhangi bir x için $|\sin x|\leq 1$ olduğundan, $2A(ABCD)$, $|AO|\,|OD|+|DO|\,|OC|+|CO|\,|OB|+|BO|\,|OA|$ dan küçük ya da eşittir ve eşitlik dört açının sinüsünün 1 olması durumunda yani dört açının da 90° olmaları durumunda geçerlidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini hatırlayalım; $x_1, x_2,...,x_n, y_1,..., y_n$ gerçel sayılarsa

$x_1y_1+...+x_ny_n\leq(x_1^2+...+x_n^2)^{1/2}(y_1^2+...+y_n^2)^{1/2}$ dir ve eşitlik ancak ve ancak

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$$

durumunda sağlanır. Bu eşitsizliği kullanarak

$|AO|\,|OD|+|DO|\,|OC|+|CO|\,|OB|+|BO|\,|OA|$
$\leq(|AO|^2+|DO|^2+|CO|^2+|BO|^2)^{1/2}$
$(|OD|^2+|OC|^2+|OB|^2+|OA|^2)^{1/2}$
$=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2+|OD|^2$

Bulduklarımızı biraraya getirirsek
$2A(ABCD)$
$\leq|AO|\,|OD|+|DO|\,|OC|+|CO|\,|OB|+|BO|\,|OA|$
$\leq|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2+|OD|^2$
$=2A(ABCD)$

Demek ki eşitsizlikler, eşitliğe dönüşmelidir, bu da ancak,
$\alpha=\beta=\gamma=\delta=90°$ ve

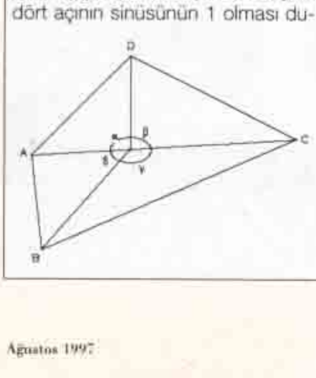
$$\frac{|OA|}{|OD|}=\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{|OC|}{|OB|}=\frac{|OB|}{|OA|}$$

olması durumunda sağlanır.

Buradan
$|OD|^2=|OA||OC|=|OB|^2$
$\Rightarrow |OD|=|OB|$ ve
$|OC|^2=|OB||OD|=|OA|^2$
$\Rightarrow |OA|=|OC|$ bulunur.
Pisagor teoreminden,

$|AB|=|BC|=|CD|=|DA|$

olduğu kolayca görülür. $\alpha+\beta=180°$ olduğundan A,O,C doğrusal ve AC köşegendir. Benzer biçimde B,O,D doğrusal ve BD köşegendir.
$4|OA||OD|=2A(ABCD)=2(|OA|^2+|OD|^2)$ dir. Buradan
$|OA|^2+|OD|^2-2|OA|\,|OD|$
$=(|OA|-|OD|)^2=0$
yani $|OA|=|OD|$ elde edilir. $ABCD$ nin bir kare olduğu açıkça görülür.



2. $S=\{x_1, x_2,..., x_n\}$ olsun. X_i sıralı m lisini şöyle tanımlayalım:
$X_i=(K_i^1, K_i^2,..., K_i^m)$ öyle ki $x_i\in A_s$ ise $K_i^s=1$, $x_i\notin A_s$ ise $K_i^s=0$ olsun. Soruda verilen koşuldan biliyoruz ki, herhangi iki x_i, x_r için öyle bir A_s vardır ki, ya $x_i\in A_s$ ve $x_r\notin A_s$, ya da $x_i\notin A_s$ ve $x_r\in A_s$ dir. Buna göre $i\neq r$ için ya $K_i^s=1$, $K_r^s=0$ ya da $K_i^s=0$, $K_r^s=1$ dir, yani $x_i\neq x_s$ için $X_i\neq X_s$ dir. 1 ve 0 ları kullanarak en fazla 2^m tane sıralı m li oluşturabiliriz. Yani sorunun koşullarını sağlayacak biçimde en fazla 2^m tane x_i olabilir, bu yüzden S kümesinin eleman sayısı: $n\leq 2^m$ dir.