



## Matematik Eğlenceleri...

# Keşişler ve Mantık

Perplexian Manastırı'nın keşişleri birbirlerine oyunlar oynamaktan çok hoşlanırlar. Bir gece Archibald ve Benedict uyurlarken, Jonah gizlice odalarına girer, ikisinin de traş edilmiş başlarının tepesini maviye boyar. Sabah olunca her biri diğerinin tepesindeki maviliği görür, fakat terbiyesi gereği susar. Aslında her biri "acaba benim tepemi de boyadılar mı?" diye düşünmektedir; fakat utanıp bunu bir türlü karşısındakine soramaz. O sırada hücreye patavatsız Zeno girer ve mavi tepeleri görünce kıkır kıkır gülmeye başlar. Keşişler "Ne gülüyorsun a birader?" diye sorarlar. Bunun üzerine Zeno da şöyle der: "En az birinizin tepesi maviye boyanmış".

Gerçekte iki keşiş de bunu zaten bilmektedir. Fakat Archibald şöyle düşünmeye başlar: "Ben Benedict'in tepesinin mavi olduğunu biliyorum; ama o kendi tepesinin mavi olduğunu bilmiyor. Acaba benim tepem de mavi mi? Diyelim ki benim tepem mavi değil. Ama Zeno "en az birinizin tepesi mavi" demedi mi? Benim

tepem mavi olmasaydı, Benedict "bu mavi de nereden çıktı" diye şaşırır, sonra kendi tepesinin mavi olması gerektiğini anlar ve öfkelenirdi. Oysa hiç tepki göstermiyor. Benedict mavi tepe lafını duyunca hiç şaşırmadı. O zaman... eyvah... demek benim tepem de mavi. Benedict ondan şaşmadı bu işe." Archibald böyle düşünür düşünmez öfkeden kıpkırmızı oldu. Aynı anda, kuşkusuz aynı uslamlamayı yapan, Benedict de kıpkırmızı kesildi.

Zeno onlara bir şey demeseydi bu mantığı asla yürütemeyeceklerdi. İlginç olan nokta şudur: Zeno onlara bilmedikleri bir şeyi söylemiş değildi; ikisi de zaten mavi tepeden haberdardılar. Peki, neden ancak Zeno konuşunca gerçeği anladılar?

Durumu derin olarak incelersek, Zeno'nun "en az birinizin tepesinde mavi var" cümlesi aslında yeni bir bilgi iletmiştir. Keşişler ne biliyorlardı? Archibald Benedict'in, Benedict

de Archibald'ın tepesinde mavi bir leke olduğunu biliyordu. Fakat üçüncü bir kişi olarak Zeno onlara adeta aynı görevi yapmış, gerçeğe varmalarını sağlayan usa vurmaya başlatmıştır. Aslında Zeno "en az birinizin tepesinde mavi var"dan fazlasını söylemiş oluyordu; "karşınızdakinin benim bu sözüme göstereceği tepkiden kendi durumunuzu da anlayabilirsiniz" demek istemişti. Onlar da gerçekten bu yolla kendi durumlarını anlamışlardı. Önemli olan ikisinin de hem mavi tepeli bilmesi, hem de karşısındakinin de bildiğini bilmesiydi.

Bu türden çok bilmece vardır; bazıları yüzü kirli çocuklarla, bazıları da partilere gülünç şapkalarla gidenlerle ilgilidir. Bu mantık problemlerine "ortak bilgi bilmece" de denmektedir; çünkü grupta herkesin bildiği bir şeye dayanırlar. Önemli olan söylenen şey değildir; önemli olan herkesin, "herkesin o gerçeği bildiğini" bilmesidir. Bu gerçeği herkes öğrendikten sonra, başka insanların bu gerçeğe gösterdiği tepkilere bakarak bazı çıkarımlar yapılabilir.

Eğer bu işi üç keşişle yaparsak problem daha da zorlaşır. Archibald, Benedict ve Cyril odada uymaktayken Jonah her birinin tepesini maviye boyar. Uyandıklarında her biri karşısındaki iki keşişin tepesinin mavi boyandığını görür ve yine susar. Sonra Zeno bombayı patlatır: "En az birinizin tepesi mavi".

İşe Archibald'ın nasıl düşündüğünü anlatarak başlayalım.

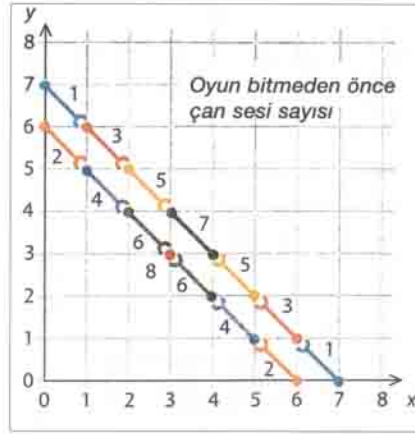
"Diyelim ki benim tepem mavi değil. O zaman Benedict, Cyril'in tepesini mavi, benimkiyse normal renkte görür ve şöyle düşünür: Eğer, ben Benedict, mavi tepeli değilsem, Cyril benim ve Archibald'ın mavi tepeli olmadığımızı anlayarak kendisinin mavi tepeli olduğunu anlardı. Oysa Cyril, düşünmek için yeterli zamanı



olduğu halde, kızmış gözükmemektedir. O halde ben, Benedict, mavi tepeli olmalıyım. Fakat Benedict düşünmek için yeterli zamanı olduğu halde kızmış gözüküyor. O halde ben, Archibald, mavi tepeli olmalıyım". Usavurma sonucu bu çıkarımı yapar yapmaz Archibald öfkeden kıpkırmızı olur. Aynı uslamlamayı yapan Benedict ve Cyril de kıpkırmızı olurlar.

Aynı mantık dört, beş ve daha fazla keşişle de yürütülebilir; fakat tündengelimci çıkarım giderek daha karmaşık bir hal alır (deneyebilirsiniz). Diyelim ki 100 keşiş var, her biri mavi tepeli, fakat bundan habersiz, hepsi de çok hızlı usavurucu. Manastır başrahibi düşünceleri eşzamanlı kılmak için bir çan getirmiş, şöyle diyor: "Bu çanı her 10 saniyede bir çalacağım. Her çan çalıştan sonra mavi tepeli olduğunu düşünen herkes elini kaldırsın. En az biriniz mavi tepeli". Eller nasıl kalkacak dersiniz? Kendiniz bir düşünün, sonra buraya bakın. İlk 99 çan çalışında hiçbir el havaya kalkmaz; 100 çan çalışından sonra 100 keşişin hepsi elini kaldırır.

Buradaki mantık şöyledir: Grupta tek bir keşiş olsaydı kendisinin mavi tepeli olduğunu bilip hemen el kaldıracaktı. İki keşiş olsaydı, herbiri mavi tepeli olmadığını düşünüp 1. çan sesinde el kaldırmayacaktı. Fakat her biri diğerinin 1. çandaki davranışına bakarak yanıldığını anlayacaktı. En az bir mavi tepeli var" denildiğine göre iki keşişin her biri şöyle düşünecekti: "Eğer mavi tepeli olmasaydım, biraderim kendisinin mavi tepeli olduğunu anlayıp elini kaldırırdı; 1. çandan sonra elini kal-



Doğru parçaları iki oyunculu oyunun ne zaman biteceğini gösterir.

dırmadığına göre ben mavi tepeli olmalıyım". Böylece 2. çan sesinden sonra ikisi de elini kaldırır. Bu mantık keşiş sayısı ne olursa olsun geçerlidir. Bu bir matematik tümevarım örneğidir. Eğer sayıların bir özelliği  $n$  için doğruysa ve  $n$  için doğru olan  $n+1$  için de doğruysa, bu özellik her  $n$  için doğru olmalıdır. Grupta 100 keşiş olduğunda, her biri "ben mavi tepeli değilim" diye düşünecek ve 99. çan sesinden sonra diğer 99 keşişin elinin havaya kalkmasını bekleyecektir. Bu olmayınca her keşiş yanıldığını anlar ve 100. çan sesinde bütün eller havaya kalkar.

Bir başka kafa patlatıcı ortak bilgi problemini Princeton Üniversitesi'nden John H. Conway ve İngiltere'deki Warwick Üniversitesi'nden Michael S. Paterson ortaya attı. Çılgın bir matematikçinin çay partisindeyiz. Partiye gelenlere üzerinde bir sayı yazılı olan bir şapka giydirilir. Bu sayı sıfırdan büyük ya da sıfır olmalıdır; tamsayı olmak zorunda değildir. Şapkalardan en az birinin üzerindeki sayı (numarası) sıfırdan fark-

lı olmalıdır. Şapkaları öyle giydirelim ki herkes kendi şapkası dışında, öteki bütün şapkalardan numaralarını görebilsin.

Şimdi ortak bilgi. Duvara bir sayılar listesi asılmıştır; bu sayılardan biri, şapkalarda yazılı bütün numaraların tam toplamıdır. Listedeki sayıların sayısının, oyuncu sayısı kadar ya da ondan daha az olduğunu varsayalım.

Her 10 saniyede bir, bir çan çalacaktır. Kendi şapkasının numarasını ya da listedeki sayılardan hangisinin doğru toplam olduğunu bilen herkes bunu yüksek sesle bildirmelidir (herkes, kendininki hariç her şapkanın numarasını gördüğünden, doğru toplamı bilen, kendi numarasını da biliyor demektir). Conway ve Paterson, mutlaka eninde sonunda oyunculardan birinin böyle bir anons yapacağını gösterdiler.

Yalnız iki oyuncu alalım; şapka numaraları  $x$  ve  $y$  olsun. Duvara asılan listede 6 ve 7 bulunsun. Her ikisi de biliyor ki  $x+y=6$  ya da  $x+y=7$ . Şimdi biraz geometri... Koordinat sisteminde  $x$  apsis,  $y$  ordinattır.  $x$  ve  $y$ , apsis ve ordinatın pozitif olduğu bölgede yukarıdaki şekilde görülen iki doğru parçasının üzerindeki noktaların koordinatlarıdır. Eğer  $x>6$  ise,  $y$  birinci çandan sonra oyunu bitirir; çünkü  $y$  derhal toplamın 6 olmayacağını anlar ve 7'yi seçer. Benzer yolla  $y>6$  ise  $x$  oyunu 1. çandan sonra bitirir. Eğer 1. çandan sonra oyunculardan ses çıkmazsa bu olasılıklar bir yana bırakılır.  $x$  veya  $y$ , 1'den küçükse, oyun ikinci çanda biter. Neden mi? Oyunculardan biri diğer oyuncunun şapkasında 1'den küçük bir sayı görür. Kendi numarasının 6 veya 6'dan az olması gerektiğini bildiğinden, toplam 7 olamaz, 6'yı seçer.

Çanın her çalışıyla elimine edilen  $x$ ,  $y$  çifti, başlangıçtaki iki doğru parçasının birbirini izleyen kısa çarpaz parçalarını oluşturur.  $x$  ve  $y$  3'e eşitse oyun 8. çandan önce biter. Bütün diğer olasılıklar 7 ve daha az çan sesi gerektirir. Aynı mantık, 3 ya da daha fazla oyuncuya uygulanabilir; fakat bunların matematiği daha zordur.

