 Doç. Dr. Abdurrahman Coşkun

Kompleks Sayılar

Kompleks sayıların ($a + ib$, a ve b reel sayılar ve $i^2 = -1$) tarihsel öyküsü, insanların bilimsel olaylara yaklaşımının zamanla nasıl değiştiğini anlamamıza ışık tutuyor. Sayma ve sayı kavramı onbinlerce yıl önce bilinmesine rağmen, negatif sayıların varlığı Avrupada ancak 16. yüzyılda benimsendi.
Negatif sayılara bakışın negatif olduğu dönemlerde karesi -1 olan bir sayının varlığı elbette kabul edilemezdi. Ancak günümüzde karesi -1 olan bir sayının varlığının da en az reel sayılar kadar gerçek ve tartışılmaz olduğu biliniyor.

Sayıların evrensel tarihi bir bakıma insanlığın olayları algılama ve kavrama tarihidir. Sayma ve sayılarla ilgili ilk bilgiler günümüzden yaklaşık 35.000 yıl öncesine dayanıyor. Negatif sayıların ise ilk kez M.Ö. 2. yüzyılda Çinliler tarafından kullanıldığını görüyoruz. Bu sayıların Avrupa'ya ulaşması ise ancak 16. yüzyılda mümkün oldu. Tarihte 1, 2, 3, 4, 5, ... gibi sayma sayıları dışındaki sayılara karşı uzun süren bir direnç olduğunu ve kolayca kabul edilmediğini görüyoruz. Örneğin $\sqrt{2}$ gibi a/b şeklinde ifade edilemeyen sayılar için Yunanlılar 'irrasyonel' (rasyonel olmayan, akla aykırı) ifadesini kullanıyordu. Matematiğin daha çok olgulara dayandığı dönemlerde negatif sayıları kabul etmek kolay değildi. Çünkü somut olarak 3 elmadan 5 elmayı çıkarmak imkânsızdı ve insanlar da böyle düşünüyorlardı. İskenderiyeli ünlü matematikçi Diophantus bile *Arithmetica* isimli eserinde $4x + 20 = 0$ denkleminin çözümü için 'absürd' ifadesini kullanmıştı. Ticaretin gelişmesi ve borçlanmanın yaygınlaşmasıyla negatif sayıların kullanılması işleri kolaylaştırıyordu. Ancak yine de negatif sayılara bakış yüzyıllar boyunca adı gibi negatif oldu. Kuşkusuz bu dönemlerde karesi negatif olan bir sayının varlığı kabul edilemezdi.

Özellikle ikinci dereceden denklemlerin ($ax^2 + bx = c$) çözümüyle uğraşan her matematikçi daha önceki sayılardan farklı bir durumla karşılaşıyordu. Örneğin $x^2 + 1 = 0$ yani bir sayının kendisiyle çarpımına 1 eklediğimizde sıfır elde edilmesi gibi. Bu denklemin çözümünde $x^2 = -1$ ve $x = \sqrt{-1}$ elde edilir. Bu sonucu gören matematikçiler çözümün olmadığını belirtip konuyu kapatıyorlardı.

Diophantus ve daha sonra Hintli matematikçi Brahmagupta ikinci dereceden denklemlerin çözümüyle ilgili önemli bilgiler verdiler. Ancak önceki matematikçilerden farklı olarak genel çözümün Harizmi (Ebu Abdullah Muhammed bin Musa el-Harizmi) (780 – 850) tarafından verildiğini görüyoruz. Bu dönemlerde matematikçiler denklem çözümlerinde daha çok geometrik yaklaşımları benimsiyorlardı ve o yüzden karesi negatif olan bir sayının olamayacağını düşünüyorlardı.

İskenderiyeli matematikçi ve mühendis Heron'un (10 - 70) kesik piramit şeklindeki cismlerin hacmini hesaplarken karesi -1 olan bir sayı ile karşılaştığı ve bunu ilk fark eden matematikçi olduğu iddia ediliyor. Heron'dan sonra Diophantus'un da sadece kesik piramit değil diğer geometrik hesaplamalarda da bu sayılarla karşılaştığı iddia ediliyor. Ancak bu döneme kadar matematikçilerin bu sayıların varlığını kabul ettiklerine dair somut bir bilgi yok. Hatta 9. yüzyılda Hintli matematikçi Mahaviracarya negatif sayıların köklerinin olmayacağını yani karesi negatif olan bir sayının bulunmadığını kesin bir dille ifade ediyordu.

Mısır'da bulunan bir papirüs gerçeğin farklı olabileceğini gösteriyor. Birçok yönüyle hâlâ gizemini koruyan antik çağ uygarlıkları hakkında bilgilerimiz arttıkça, onların sanıldığı gibi pek de geri olmadıkları hatta çok ileri düzeyde bazı kavramları bildiklerini görüyoruz. 1878 yılında Mısır'da bir mezarı soyan hırsızlar buldukları papirüsleri Rus asıllı Antik Mısır uzmanı V.S. Golenishchev'e sattılar. Golenishchev 1912 yılında bu papirüsleri Moskova Güzel sanatlar müzesine verdi. Papirüs burada incelendi ve 1930 yılında çe-

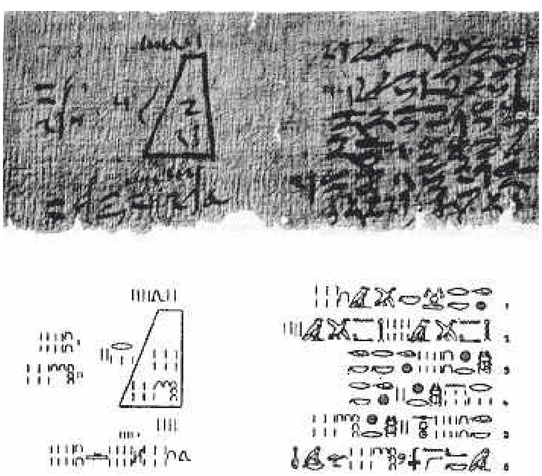
coskun2002@gmail.com

virisi tamamlandığında, papirüslerin yazıldığı dönemdeki Mısır matematiği hakkında, çok önemli bilgilere ulaşıldı. Günümüzde Moskova Matematik Papirüsü olarak da bilinen papirüsün M.Ö. 1850'li yıllarda yazıldığı tahmin ediliyor. Papirüsteki bilgilere göre kesik bir piramidin hacminin nasıl hesaplanacağı o dönemde biliniyordu. Moskova Matematik Papirüsündeki bilgilerden yola çıkan bazı bilim insanları eski mısırlıların karesi -1 olan sayıları bildiklerini veya benzer bir durumla karşılaştıklarını iddia etiler. Böyle bir durumla karşılaşmışlarsa da muhtemelen bunu anlamsız bulmuşlar.

Sanılanın aksine, negatif sayıların karekökü ikinci dereceden değil, üçüncü dereceden $(ax^3 + bx^2 + cx = d)$ denklemlerin çözümü sırasında ciddi olarak düşünülmeye başlandı. İkinci dereceden denklemlerin çözümünde karesi -1 gibi negatif bir sayının olamayacağı düşünülerek çözümün olmadığı kabul edilmişti. Belki bu dönemde insanlar karesi negatif bir sayı olan yeni bir sayıyı kavramsal olarak benimsemiyordu ve çözümün olmadığını kabul etmek daha cazip geliyordu. Ancak üçüncü dereceden denklemlerin çözümünde durum farklıydı. Çünkü böyle bir sayının varlığı veya benzer bir yaklaşım, çözümde büyük kolaylıklar sağlıyordu. Ancak bu o kadar da kolay olmadı. Örneğin üçüncü dereceden denklemlerin çözümüyle uğraşan ilk matematikçilerden biri olan Ömer Hayyam'ın (1048 - 1131) bu sayılarla ilgili bilgisinin olup olmadığı bilinmiyor. Ömer Hayyam'dan sonra gelen Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1170-1250), Nicolo Tartaglia (1499-1557) gibi matematikçilerin de $x = \sqrt{-1}$ gibi bir sayı hakkında somut çalışma yapıp yapmadıkları bilinmiyor.

Mısır papirüslerini başlangıç olarak alırsak yaklaşık 3400 yıl boyunca insanlar bu sayıların varlığını inkâr ettiler. Yok sayıldı, böyle bir şey olamaz denildi. Hatta bu konuda ilk önemli adımı atan İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501 - 1576) bile bunlar için 'akıl işkencesi' tabirini kullandı.

Cardano kompleks sayıların cebirde kullanılmasını sağlayan ilk bilim insanı olarak biliniyor. Ancak Cardano bu konuyu Ars Magna (Büyük Sanat) adlı eserinde detaylı olarak ele almadı. Cardano'dan sonra Rafael Bombelli'nin konuyu daha detaylı ele aldığını görüyoruz. Bombelli kompleks sayıları kullanarak üçüncü dereceden denklemlerin köklerini daha kolay bulduğunu belirtmişti.



M.Ö. 1850'li yıllarda yazıldığı tahmin edilen Moskova Matematik Papirüsü

İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501 - 1576)

Cardano'ya kadar geçen süre kompleks sayıların ilk dönemi sayılabilir. Bu döneme kadar varlığı kabul edilmeyen bu sayılar artık inkâr edilemez bir biçimde etkisini hissetiriyordu.

1637 yılında Fransız filozof René Decartes (1596 – 1650) ilk kez bu sayılar için 'imaginery' terimini kullandı ve negatif bir sayının karekökünü 'sanal' olarak niteledi. Ona göre herhangi bir hesaplamada sanal sayıların bulunması, gerçekte, çözümün olmadığı anlamına geliyordu. Bu konuda Isaac Newton da Decartes'la aynı kanıdaydı.

18. ve 19. yüzyıllarda kompleks sayılar adeta altın çağını yaşadı ve çok sayıda matematikçi bu sayılarla ilgilendi: Leonhard Euler, Abraham de Moivre, Carl Friedrich Gauss, William Rowan Hamilton, Augustin Louis Cauchy, Bernhard Rieman, Karl Weierstrass ve daha niceleri.

Leonard Euler (1707 – 1783) ilk kez kompleks sayılar için $i = \sqrt{-1}$ kavramlaştırmasını kullandı. Cardano'dan Euler'e kadar geçen dönemi kompleks sayıların ikinci dönemi olarak kabul edebiliriz. Önce varlığı kabul edilmeyen, sonra üçüncü dereceden denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağladığı için üşenerek de olsa kabul edilen ve daha sonra çok sayıda matematikçinin üzerinde çalıştığı ve adeta kimliğini aydınlattığı bu sayı-

Fransız filozof René Decartes (1596 – 1650)

lar, Euler'le birlilkte artık üçüncü dönemine giriyordu. Bu dönemde kompleks sayılar adeta kurtarıcı rolünde, çok sayıda zor problemin kolay çözümünde anahtar rol üstlenmişti. Kompleks sayıların bulunması ve buna dayalı kompleks analiz, matematikte görünürde birbirleri ile ilgisi olmayan çok sayıda farklı konu veya nicelikler arasında bağıntı bulmayı son derece kolaylaştırıyordu. Euler'in 1748 yılında bulduğu eşitlik buna en güzel örnektir. Euler, bütün reel θ (theta)'lar için

$\mathbf{e^{i\theta} = Cos\theta + i\,sin\theta}$ olduğunu ispatladı. Bu eşitlik soldaki kompleks değerli üs fonksiyonu ile trigonometrinin normal reel değerli sinüs ve kosinüs fonksiyonları arasındaki bir bağlantıyı ifade ediyor.

Abraham de Moivre (1667 – 1754) kendi adıyla bilinen formülü kullandığında adeta kompleks sayılar için gerçek anlamda hoş geldin partisi veriyordu.

$\mathbf{(Cos(\theta) + i\,sin(\theta))^n = Cos(n\theta) + i\,sin(n\theta)}$,

n bir tamsayı.

Trigonometrik fonksiyonlarla işlem yapmanın ne kadar zor olduğunu eminim matematikle uğraşan herkes bilir ve yukarıdaki formül, hesaplamalarda inanılmaz kolaylık sağlıyor. Sanal kabul edilen, varlığı tartışılan ve çoğu zaman red edilen bu sayılar de Moivre formülü ile matematikte güçlü bir şekilde yerini alıyordu.

Matematikçiler prensi olarak kabul edilen Gauss, bu sayılar için 'kompleks sayılar' ifadesini kullandı. Kompleks sayıların ne tamamen reel ne de tamamen sanal olmadığı görüldü. Aksine ikisinin karışımıydılar. Gauss'un çalışmalarıyla kompleks sayılara adeta resmiyet kazandırıldı. Gauss, kompleks sayıları bir düzlem üzerindeki noktalar şeklinde düşünerek matematiğin 'kompleks analiz' denilen dalının temellerini attı. Benzer çalışmaları daha önce Norveçli matematikçi Casper Wessel de yapmıştı. 1837 yılında William R. Hamilton, Gauss'un çalışmalarını geliştirerek kompleks sayıları (x,y) koordinatları ile belirledi ve bu sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinin yolunu açtı. Gauss ve Hamilton'ın çalışmaları sayılar dünyası için çok önemli gelişmelerdi. Reel sayılar sayı doğrusu üzerinde gösterilirken kompleks sayılar düzlem üzerinde gösteriliyordu. Reel sayılardan daha geniş olan kompleks sayılar bilinen tüm sayıları kapsıyordu. Karl Weierstrass kompleks analize tam bir kesinlik kazandırdı ve adeta matematik binasındaki kompleks sayılar dairesinin tapusunu verdi. Rieman, kompleks analizin geometrik teorisini geliştirdi ve günümüzde hâlâ çözüm bekleyen ünlü 'Rieman Hipotezi'ni 1859 yılında ortaya attı.

24 Mayıs 2000 yılında Paris'te yapılan bir toplantıda Clay Matematik Enstitüsü milenyumun 7 problemini anons ediyordu. Bunlar için 7 milyon dolarlık ödül konulmuştu. Yani her bir problemi çözene 1 milyon dolar ödül verilecekti. Bu problemlerden biri de 1859 yılında Rieman tarafından ortaya atılan 'Rieman Hipotezi'dir ve hâlâ çözülmemiştir. Eğer bu problemi çözerseniz ve çözümünüz de onaylanırsa 1 milyon doları alabilirsiniz.

Kompleks sayılarla sayı dünyasına son noktayı koyduk mu? Kuşkusuz hayır. Bilim insanları karşılaştığı problemlerin çözümünde yeni sayılara ihtiyaç duyarlarsa bunları elbette kullanacaklar. Bereket ki eskisi gibi direnç yok. Karesi -1 olan bir sayının olamayacağı uzun süre kabul edildi. Peki ya sıfırdan farklı fakat karesi sıfır olan bir sayı var mı? Eminim cevabınız biraz şaşkınlıla 'tabi ki olamaz' şeklindedir. Ancak böyle bir sayı var. William Kingdon Clifford (1845 – 1879) tarafından geliştirilen 'dual sayılar' da kompleks sayılara benzer şekilde a + ωb şeklinde gösteriliyor; a ve b reel, ω sıfırdan farklı fakat karesi sıfır olan sayı. Kompleks sayılarla dual sayıları bir araya getirdiğimizde a+ib+ωc+iωd şeklinde yeni bir sayı elde edebiliriz. Bu yeni sayılar kompleks sayıları da kapsıyor ve daha geniş bir sayı kümesi.

Sizler de karşılaştığınız bir problemi çözmek veya bilimsel bir olayı açıklamak için uygun bir sayı sistemi geliştirebilirsiniz. O zaman geliştirdiğiniz sayı kümesi belki de daha geniş bir küme olacak. Neden olmasın?

Kaynaklar

Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale, The Story of √-1*, Princeton University Press, 2010.
Merino O., *A Short History of Complex Numbers*, University of Rhode Island, 2006.
Jerry P. King, *Matematik sanatı*, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, Ankara 17. Basım Mart 2006.
http://www.claymath.org/