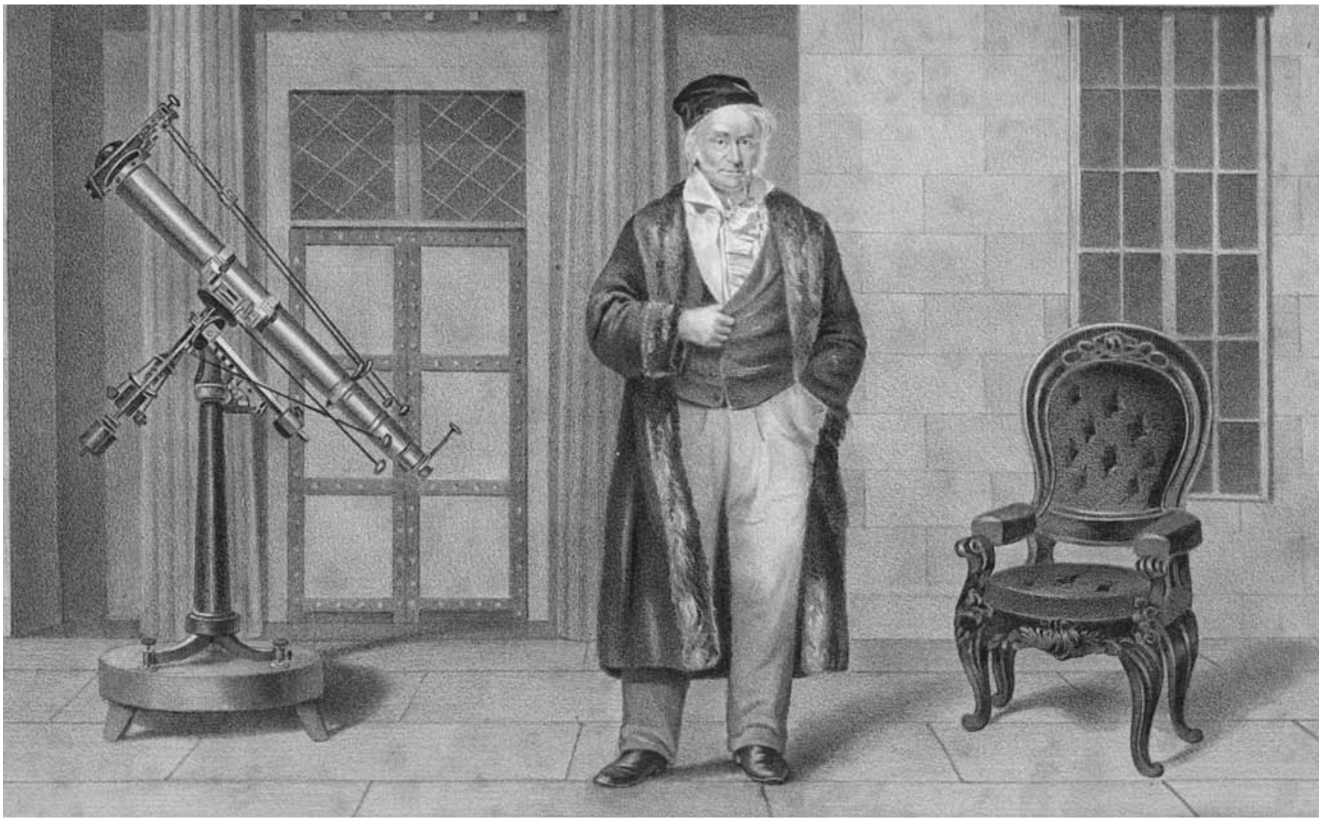
SONLU TOPLAMLAR



İnsanoğlu yeryüzündeki yaratıkların en yaratıcı olanı şüphesiz. Üstelik bu özelliğini biraz da tembellik yapma arzusuna borçlu. Yaratıcılık ve tembellik gibi birbirine zıt iki kavram nasıl olur da birbini tetikler acaba? Yaratıcılık sonucunda ortaya çıkan pek çok buluşun bugün neredeyse hayatın her alanında seri işlem yapan ve dolayısıyla insanoğluna yapması için daha az iş bırakan 'makineler' olduğunu düşünürsek bu iki kavramın birbiriyle bağlantılı olduğu açıkça görülür. Makine denince akla genellikle metalden yapılmış, otomatik olarak çalışan bir araç geliyor. Aslında makine, önceden belirlenmiş bir işi kendi kendine, bir örnekte yani kendisine öğretildiği şekilde yapacak biçimde düzenlenmiş bir aygıt. Bu durumda formülleri de birer makine gibi düşünebiliriz. Nasıl bir bulaşık makinesi içine konulan kirli bulaşıkları kendi kendine yıkamakla yükümlüyse formüller de aldıkları belli değerler için belli sonuçlar vererek soyut birer makine gibi davranırlar ve onlar da insanoğlunun pratik olma (diğer bir deyişle tembellik yapma) arzusunun bir sonucudur.

Johann Carl Friedrich Gauss 10 yaşında küçük bir çocukken (yıl 1787) matematik öğretmeni biraz tembellik yapmak için mi yoksa uğraşması gereken başka işleri olduğu için mi bilinmez, sınıftaki öğrencilerden 1'den 100'e kadar olan sayıları toplamalarını istedi. Hemen kötü niyetli olmamak lazım. Belki de öğretmen, bu ödevi, öğrencilerinin toplama üzerinde biraz pratik yapması için verdi, ne de olsa zaman kazanmak için 1'den 500'e kadar olan sayıları toplatmak daha karlı gibi gözüküyor. Öğrenciler daha 20'ye kadar toplamadan Gauss hocasını yanına çağırdı, amacı sonucunun doğru olup olmadığını sormaktı. Öğretmeni Gauss'un yanına doğru giderken ona nasıl kızacağını düşünüyordu çünkü bu kadar kısa sürede kim bulabilirdi ki cevabı? Defterini kontrol ettiğinde şaşkındı ve gelmiş geçmiş en büyük dahilerden birinin karşısında olduğunu o an için farkedemediyse de normal üstü bir zekayla karşı karşıya olduğunu anlamıştı.

Aynı işleri sürekli yapmak bazen bunaltır bizleri. Hatta bu aynı işi 100 kere yapmanız gerekiyorsa pratik zekanız mecburen devereye girer ve yaratıcı biri olup çıkıverirsiniz. Gauss diğer çocuklar gibi toplamayı 100'e kadar yapacağına, kolay yollar aramayı tercih etti. Sırayla bir baştan ve bir sondan aldığı sayı ikililerinin toplamlarının aynı olduğunu farketti:

$$\underbrace{1 \text{ ve } 100}_{1.\text{çift}};\ \underbrace{2 \text{ ve } 99}_{2.\text{çift}};\ \underbrace{3 \text{ ve } 98}_{3.\text{çift}};\ldots;\underbrace{50 \text{ ve } 51}_{50.\text{çift}}$$

Hepsi de toplanınca 101 ediyordu. Dahası, 101 eden bu toplamlardan 50 tane vardı. 50 tane 101 demek bu iki sayının çarpımı demekti:

$$50 \times 101 = 5050$$

Genel Bir Formül

Aslında genel bir formülü bu örneğe bakarak tahmin edebiliriz.

100'ün yarısını 100'ün 1 fazlası ile çarpmıştık. Öyleyse 1'den n'e kadar olan sayıların toplamını her n doğal sayısın için bulmak istediğimizde yapmamız gereken n'in yarısını n'in 1 fazlası ile çarpmak olsa gerek. Yine de bu genel sonuçtan hemen emin olmayın çünkü bunu tahmin yoluyla bulduk ve onu ispatlamadan kullanmak hata yapmamıza neden olabilir. Tümevarım yöntemi kullanarak yapılan ispat gösteriyor ki bu tahmin gerçekten doğru. (okuyucumuzun bu ispatı denemesini tavsiye ederiz)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Bir formülün makine gibi çalışmasından bahsederken neyi kastettiğimiz şimdi daha açık bir hal almış olsa gerek. 1'den 51398565748'e kadar olan sayıları toplamak mı istiyorsunuz? Formülede n yerine sayınızı koyun sonuç otomatik olarak gelsin, 51398565748 tane toplama işlemiyle uğraşmayın. Bu arada toplam sembolü olarak kullanılan Σ işaretinin gelmiş geçmiş en üretken matematikçi Leonhard Euler tarafından önerildiğini belirtmekte de fayda var.

Diğer Sonlu Toplam Formülleri

1'den n'e kadar olan sayıların karelerini, küplerini ya da 4. üncü kuvvetlerini toplamak isterseniz bunların hepsi için birer formül olduğunu duymak sizi mutlu edebilir. Örneğin sayıların karesi için:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

ya da küpleri için

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{[n \cdot (n+1)]^2}{4}$$

Dahası bu toplamı 51398565748'inci kuvvette bile yapabilirzsiniz çünkü genel bir formül de mevcut. Ama uyaralım, bu genel formül biraz uzun. Bu sayfaya sığsa bile geriye yazımızı tamamlayacak yerimiz kalmazdı. Meraklılar formülü adresinde bulabilir. (ingilizce bir engel teşkil etmiyor. Ne de olsa matematiğin dili evrensel)

Cebir ve Geometri Arasındaki Köprüler

Genellikle cebir, geometriye yardımcı oluyormuş da geomterinin cebire bir faydası yokmuş gibi gözükür. Halbuki öyle durumlar vardır ki geometri cebirin en büyük yardımcısı olup çıkıverir! Bu yardımlaşmanın güzel bir örneğini 9. yüzyılda El-Harizminin ikinci derece denklemleri çözmek için kullandığı metotlarda görebiliriz. Harizmi'nin Hisabül-Cebr ve'l-Mukabele ismli kitabından ve cebir kelimesinin buradan geldiğinden daha önceki yazılarımızda bahsetmiştik. Tamamlama anlamına gelen cebr kelimesini, elindeki ikinci derece denklemleri tam kareye tamamlayarak çözme metodunu ifade etmek için kullanan Harezmi bu çözümleri yaparken durumu geometrik ispatlarla canlandırmayı da unutmamış.

Kendisinin kullandığı $x^2 + 10x = 39$ örneğini ele alalım.

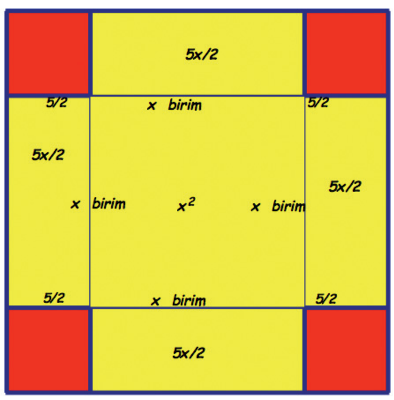
Sol tarafın tam kare olması için $(\frac{10}{2})^2$ eklenmesi gerekiyor. Birine ekleyince eşitlik bozulmasın diye diğerine de eklemek gerekir:

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 5^2$$
$$(x+5)^2 = 64$$

Şimdi her tarafın kökünü alıp denklemi x için çözebiliriz:

$$(x+5) = \pm 8 \Rightarrow x = 3 \quad veya \quad x = -13$$

Peki tam kare olması için $(\frac{10}{2})^2$ eklenmesi gerektiğini nasıl anladık? Bunu pek çok şekilde cevaplandırabiliriz. Harezmi'nin geometri kullanarak verdiği cevap şöyle:

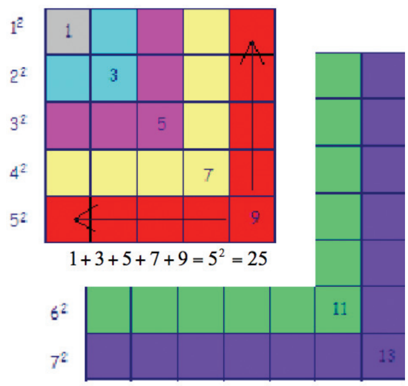


Sarı alan $x^2 + 10x$ i temsil ediyor, yani ortadaki karenin alanı x^2 ve kenarlardaki dikdörtgenlerin alanı da $\frac{10x}{4} = \frac{5x}{2}$.
Bu alanı tam kareye tamamlamak için köşelerdeki 4 kareyi eklemek gerekir.
Bir kenarı 5/2 olduğunu şekilden açıkça gördüğümüz bu karelerin herbirinin alanı 25/4 olarak kolayca hesaplanabilir.
Toplam da 4 kare olduğu için ifadeye $\frac{25}{4} \cdot 4 = 25$ eklemek tam kareye tamamlamak için yeterli oluyor.

Geometrik ispatın bir diğer bir örneğini de tek sayıların toplam formülü için verebiliriz:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Bu formül Gaussun 10 yaşındayken ürettiği formülden birkaç basit kural kullanılarak çıkarılabilir ama çıkarım, şu geometrik ispat kadar göze hitap edebilirmi ona siz karar verin:



Sonlu toplamlar, sonsuz toplamların çözülmeye başlamasıyla üzerindeki ilgiyi kaybetti. Gerçi sonsuz toplamlar matematik tarihi kadar eski bir mesele. Zenon'un paradoksları bunun en büyük kanıtı. Bu meselenin çözülmesi sonsuz küçükler hesabının ortaya çıkıp geliştiği döneme rastlar.

Sonsuz tane sayının toplanabilmesi ve bunun da elle tutulur bir sayı olması sadece matematikçilerin değil bu durumu gören pek çok kişinin de ilgisini çekmiştir. Sonsuz toplamları ayrıntılı olarak önümüzdeki sayımızda ele alacağız.

Köşemizin bu ayki mektubunu bir motivasyon ve ön hazırlık teşkil etmesi için bu konuda seçtik.

Nilüfer Karadağ

Bir Buluşum Var

Bir Eşitsizlik

Merhaba;
Sizlere önemli bir eşitsizlikten bahsedeceğim.
(1) 1 + 2 + 4 + 8 + ...= x olsun;
x'i temel aritmetik bilgileriyle kolaylıkla bulabiliriz.
2(1 + 2 + 4 + 8 + ...)= 2x
2 + 4 + 8 + 16 ...= 2x
(2) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +...=2x+1
Dikkat ederseniz (1). ve (2). ifadeler aynı, o halde
x =2x+1
x = -1
Bu bilinen bi gerçek ve pek çok kitapda ve dergide geçiyor.
Gelelim benim bulmuş olduğum kurala;
1 + 2 + 3 + 4 + ... toplamının kaç olduğunu bulmaya çalışacağız.
1 + 2 + 3 + 4 + ...= x olsun, bu ifadeyi şu şekilde yazabiliriz.
1 + (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1)+ ...= x
ve
1 + 2 + 3 + 4 +... + 1 + 1 + 1 +...=x
1 + 2 + 3 + 4 ifadesinin yerine x yazdığımızda
x + 1 + 1 + 1 +...=x
1 + 1 + 1 +...=0
Tekrar (1). ifadeye geri dönelim.
1 + 2 + 4 + 8 + ...= -1 bulmuştuk. Bu ifadeyi şu şekilde yazabiliriz.

1 + (1 + 1) +(1 + 1 + 1 + 1)+...= -1
Sonsuz tane 1'in toplamını az önce sıfır olarak bulduğumuza göre
1 + 2 + 4 + 8 +...
=1 + (1 + 1) +(1 + 1 + 1 + 1)+...= 0
olması gerekirdi ama -1 çıkıyor.
Doğruluğu aşikar olan iki yöntemle bir ifadenin iki farklı değerine ulaşıyoruz.
Bu ifadeyi daha da genişletebilir ve farklı ifadelere uygulayabiliriz. Bu bizi büyük bir belirsizliğe götürür.
Buluşumu değerlendirirseniz sevinirim.

Harun Yurdagül
Ankara Atatürk Anadolu Lisesi
Yenimahalle Ankara

Harun arkadaşımız oldukça ikna edici ve iddialı bir mektup yollamış. Öncelikle kendisine fikirlerini bizlerle paylaştığı için teşekkür ediyor ve matematiğe olan ilgisinin hep böyle dinamik kalmasını diliyoruz.

-1=0 gibi bir sonuca ulaştığımızı görünce akla ilk gelen basamakların birinde hata yapılmış olduğudur. Şayet basamaklarda hata yoksa yani gerçekten (doğru kullanılmış) matematiksel ifadeler bizi -1=0 gibi bir eşitliğe (daha doğrusu eşitsizliğe) götürüyorsa matematiğin en temelinde ciddi bir hata var demektir ve bu da 3000 yıldır kullanılan ve mükemmel çalışan bir sistemin bitmesi demektir!

Matematiği yargısız infaz etmemek için şimdi ifadeleri teker teker inceleyelim.

'1 + 2 + 4 + 8 + ...= x olsun' (!)

Gerçekten böyle bir kabul yapılabilir mi? x nasıl bir şeydir? Şayet bir sayıysa evet onunla ilgili cebirsel işlemler yapar, denkleme koyar gerçek değerini buluruz. Ama sayı değilse böyle şeyler yapamayız çünkü toplama çıkarma işlemleri sayılar için tanımlanmıştır.

1 + 2 + 4 + 8 + ...toplamının sonsuza ıraksadığı belli yani sonuç bir sayı olamaz. Kabullenme yanlış olduğu için kalan işlemler de yanlış bir sonuca varmamıza neden oluyor.

Harun arkadaşımızın da belirttiği gibi bu ifadeler oldukça genişletilip şaşırtmacalı oyunlar çıkarılabilir. Bunların en meşhurlarından biri de bütün tamsayıların toplamı ile ilgili olandır:

...(-3) + (-2) + (-1) + 1 + 2 + 3...=???

'Bu toplamın 0 olmasından daha doğal ne olabilir ki' diyenlerdenseniz uyarıyoruz, çünkü sizinle hemfikir olmayanlar da var. Bu farklı fikirlerden biri şöyle:

...(-3) + (-2) + (-1) + 1 + 2 + 3...
=0 + 1 + (2 + (-1)) + (3 + (-2)) + ...
= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...

ki limit değeri ∞ 'a gider.

Diğer bir fikir şöyle:
...(-3) + (-2) + (-1) + 1 + 2 + 3...
=0 – 1 + (1 + (-2)) + (2 + (-3)) + ...
= –1 – 1 – 1 – 1 –... ki limit değeri $-\infty$ 'a gider.

Bu fikirlerin en ilginci de şu:
0 + ((-1) + 2) + (1 + (-2)) + ((-3) + 4) + (3 + (-4))...
=0 + (1) + (-1) + (1) + (-1)...

Bu toplama değişik öneriler getirenler var
1.Öneri: ((1) + (-1)) + ((1) + (-1)) +...
=0
2.Öneri: (1) + [(-1) + (1)] + [(-1) + (1)]...
=1 + 0 + 0...
=1
3.Öneri: (-1) + [(1) + (-1)] + [(1) + (-1)]...
=-1 + 0 + 0...
=-1
4.Öneri: 1 - 1 - 1 + ... = T
1 - (1 - 1 + ...) = T,
1 - T= T
T=1/2

Yani biraz zorlayınca tamamı tam sayılardan oluşan bir toplamı kesirli bir sayı olan 1/2'ye eşitledik. Peki ya yine nerede hata yaptık? Bu sefer daha deneyimli olduğumuza göre aynı hatayı yaptığımızı hemen farkedebiliriz. Bütün tam sayıların toplamı olarak ifade edilen serinin yakınsak olduğunu yani sonucunun bir sayı olduğunu kabul ederek işe başladık bu kabulü ispatsız kabul etmenin nelere malolduğunu da gördük.

Unutmayın sonsuzu sayı gibi kabul edip kendisi ile

$\infty + -\infty = 0$

gibi işlemler yapmamız doğru değildir. Cebirsel işlemler sayılar için tanımlanmıştır. Nasıl elmadan armutu çıkaramıyorsak bu basit gibi gözüken işlemi de yapamıyoruz.

Nilüfer Karadağ
karadagnilufer@yahoo.com

Eğer siz de kaydettiğiniz önemli bir bulgu olduğunu düşünüyorsanız dergimize gönderin ve onu sizin için değerlendirelim. Adresimiz:

**TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi,
Buluşumu Değerlendirin Köşesi,
Atatürk Bulvarı No:221
Kavaklıdere-ANKARA**