Matematik "Güzel"dir

Matematik bir bilim midir yoksa bir sanat dalı mıdır? Birçok matematikçi kendini sanatçı olarak görü. Onlara göre matematik sezgi, gözlem gücü, yaratıcılık ister ve matematik teoremlerinin estetik bir yönü vardır. Matematiğin diğer sanat eserlerinden en önemli farkı içerdiği kesinlik ve evrenselliktir. İşte bu matematiğin bilim yüzüdür. Peki bu durumda, "matematikçi ölümsüz eserler yaratan bir sanatçıdır" diyebilir miyiz?

MATEMATİKÇİLER çok çeşitli sorular üzerine kafa yorarlar. Farklı alanlardan farklı konularla ilgili sorularla uğraşan matematikçilerin ortak amacı doğal olarak önlerinde duran soruyu çözebilmektir. Bunun için matematikçiler çok çeşitli yöntemler geliştirmişler, teoremler kanıtlamışlardır. Sonuçta amaç soruyu çözmek olduğuna göre bilimsel açıdan hangi yöntemin kullanıldığının yani sonuca hangi yoldan ulaşıldığının önemi yokmuş gibi gözükür. Yeter ki kullanılan yöntem matematiksel olarak doğru olsun. Fakat bir de matematiğin estetik yönü vardır. Nasıl güzel müzikten, güzel resimden ya da güzel bir heykelden sözedebiliyorsak güzel bir çözümden ya da güzel bir teoremden de sözedebiliriz. Kısalık, kolayca anlaşılabilir olmak ve de özgünlük bir teoremin güzelliği için ilk akla gelen özellikler olarak sıralanabilir.

Hemen hemen hepimiz ilkokul ya da lise sıralarında gördüğümüz bir prob-lem çözümüne ya da bir teorem kanıtına hayran kalmış ve bu çözümü, bu kanıtı yapan kişiye karşı bir saygı duymu-şuzdur. Hatta belki o kişiyi biraz kıskanmış ve ona kızmışızdır bu kanıtı bizden önce yaptığı ve bize yapılacak birşey bırakmadığı için. İşte tam da bu kıskançlık ve sitemle karışık hayranlık duygusudur bir insanı matematikçilere ve onların uğraştıkları işe, matematiğe çeken.

Matematikle estetik ilişkisi hakkında Amerika Matematik Derneği'nin eski başkanlarından Lynn Steen şunları yazmıştır:

'Sanat dünyasında hiçbir benzeri olmayan bir nesnelliğe sahip olduğu halde, yaratıcı matematiğin güdüsü ve standardı bilimden çok sanatınkilere benzer. Matematiksel teoremlerin sınıflandırılmasında estetik yargı hem mantıktan hem de uygulanabilirlikten üstün tutulur: Matematiksel fikirler değerlendirilirken, kesin doğruluk ya da yararlı olma olasılığından çok güzellik ve zerafet etken olur.'

Evet, Steen'in de söylediği gibi birçok matematikçinin temel kaygısı, estetiktir ve bu yüzden de diğer bilimadamlarından daha çok sanatçılara yakın hissederler kendilerini. Ünlü bir matematikçi olan Weirstrass, "Bir çeşit şair olmayan bir matematikçi, hiçbir zaman mükemmel bir matematikçi olamaz" demiştir. Matematikçi de bir bakıma sayıların sanatını yapan bir sanatçıdır. Belki resimdeki renkler, müzikteki sesler ya da heykeltraşın taşı kadar somut değildir malzemesi ama sonuçta ortaya çıkardığı ürünün estetik değeri en az onlar kadar yüksektir.

Matematiğin diğer sanat dallarından önemli bir farkı vardır. Bu da sadece belirli bir insan grubuna sesleniyor olmasıdır. Diğer sanat dallarında da üretici durumunda olan -beste yapan, resim yapan, şiir yazan- insan sayısı sınırlıdır ancak belirli bir estetik anlayışa sahip olan (ki herkesin kendine göre bir estetik anlayışı vardır) herkes üretilenlerle ilgilenebilir ve bunlardan zevk alabilir. Ancak matematikte durum biraz farklıdır. Matematikte ister üretici durumda olun ister inceleyen durumunda, önünüzde duran kanıtın tüm basamaklarını anlamanız, kanıtın hiçbir yeriyle ilgili kafanızda soru işareti kalmaması gerekir. Bu da belli bir matematik kültürü ve matematiksel ilişkileri kavrayabilme yeteneği ister.

İngiliz matematikçi G.H. Hardy de matematikte estetiğin önemini vurgulayan matematikçilerden biridir. Hardy'ye göre tüm yaratıcı uğraşlarda olduğu gibi matematikte de imgeler yaratılır. Matematikçinin yapı malze-

mesi düşündür. Matematiğin kalıcı olmasının nedeni de düşüncelerin yavaş eskimesinden kaynaklanır. Ressam ve şairin imgeleri gibi matematikçinin imgeleri de "güzel" olmalıdır. Çirkin matematiğe yer olmadığını söyleyen Hardy, güzelliğin kalıcılık için ilk şart olduğu görüşündedir. Ona göre matematik 'güzel' olduğu kadar 'ciddi' ve 'önemli' de olmalıdır. Peki nedir bir teoremi ciddi ve önemli kılan? Hardy bir teoremin öneminin uygulamaya yönelik sonuçlarından değil, kullanılan matematiksel düşüncelerin öneminden kaynaklandığını söyler. Bir matematiksel düşüncenin önemi ise doğal ve aydınlatıcı biçimde matematiğin bütünü ile bağlanabilmesindedir.

Matematik ve estetik ilişkisi konusunda, Cahit Arf'ın görüşleri de oldukça yakındır diğer büyük matematikçilerinkine. Arf için matematik bir güzel sanattır, özellikle de müziğe yakındır. Şöyle açıklar görüşlerini: "müzik, basit bir takım seslerin süperpozisyonu ve birbirlerini takip etmelerinden müteşekkil cümlelerden ibarettir diyebiliriz. Fakat böyle cümleler her zaman müzik olamaz. Çoğunlukla kaotik gürültüler olurlar. Gürültü olmaktan kurtulmaları için bunların bazı kurallara uygun olarak teşkil edilmiş olmaları icap eder. Bunlara artık gürültü denmese bile henüz müzik de denemez. Böyle ses cümlelerinin müzik olabilmesi hiç bir kriteryoma mutlak olarak bağlı olmayan estetik bir unsuru ihtiva etmeleri ile mümkün olur. Aynı şey şu şekilde matematik için de doğrudur; sayılar veya geometrik şekiller yardımı ile teşkil edilen sillojizm zincirlerinin hepsine matematik, hiç değilse güzel matematik denemez. Böyle olması için ses cümlelerinde olduğu gibi sillojizm zincirlerinin de kesin olarak tarif edilemeyen estetik bir unsuru içermeleri lazımdır." Hatta Arf için matematiksel bir teoriyi anlamak demek bildiğimiz anlamda teoremin içerdiği matematiksel ilişkileri anlamak demek değildir. Ona göre bir teoremi anlamak, o teoremin içerdiği estetik unsurunu sezmek demektir. Matematik ve estetik üzerine bu kadar sözden sonra birkaç örnek vermemek olmaz herhalde. Doğal olarak böyle bir yazıda matematiğin içerdiği estetiği göstermek için son derece basit ve matematik hakkında temel kavramları bilen bir okuyucu tarafından kolayca anlaşılabilecek teoremlerin kanıtını vereceğiz. Vereceğimiz kanıtlar 'zarif' oldukları konusunda birçok büyük matematikçi tarafından üzerlerinde fikir birliği edilmiş kanıtlar olacak. Böylelikle matematikçilerin neyi beğendiklerini, 'güzel' bir matematik teoreminde ne aradıklarını da daha yakından görmüş olacağız.

Birinci teoremimiz $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunun kanıtlanması. (İrrasyonel sayılar *a* ve *b* tam sayı olmak üzere *a*/*b* şeklinde yazılamayan sayılardır.) Bu teorem Pisagor (ya da onun okulunun bir üyesi) tarafından bundan binlerce yıl önce kanıtlanmış. Ancak aradan geçen yıllar teoremin güzelliğinden hiçbirşey götürmemiş çünkü bu süreçte matematik gelişmiş ancak değişmemiş.

Teoremin kanıtı için olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Öncelikle teoremin yanlış olduğunu, yani $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda (p ve q tamsayı olmak üzere)

$$\sqrt{2}=p/q$$

yazılabilir. Burada p ve q aralarında asal sayılardır, yani 1'den büyük bir ortak çarpanları yoktur. Eğer olsaydı bunları sadeleştirirdik ve ortak çarpanları kalmazdı. Buradan,

$$\sqrt{2}=p \text{ ve}$$
$$2q^2=p^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Sonuncu eşitlik bize p^2'nin çift sayı olduğunu söyler. Öyleyse p de çift bir sayıdır. (Çünkü tek sayıların kareleri de tek sayıdır). O halde bir t tamsayısı için $p=2t$ yazılabilir. Bunu son bulduğumuz eşitlikte yerine yazarsak,

$$2q^2=(2t)^2$$
$$q^2=2t^2$$

elde ederiz.

Yukardakine benzer olarak, buradan da q sayısının bir çift sayı olduğu sonucuna ulaşırız. Bu durumda hem p hem de q çift sayılar olup 2 ile bölünebilirler. Bu ise bizim başlangıçta yaptığımız p ve q'nun ortak çarpanları olmadığı şeklindeki varsayımımızla çelişir. Öyleyse $\sqrt{2}$'nin rasyonel bir sayı olduğu varsayımımız da yanlıştır, yani $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Q.E.D. (Bu kısaltma matematikçilerin çok sevdikleri ve 'kanıtlanması gereken de bu idi' anlamına gelen Latince 'Quaod Erat Demonstrondum' kelimelerinin baş harfleridir).

Hardy, bu teoremin neden güzel olduğunu açıklamaya çalışmıştır. Ona göre ciddiyet, derinlik, genellik, beklenmedik olma, kaçınılmazlık ve ekonomi bu kanıtı estetik kılan özelliklerdir. Gerçekten de bu özelliklerin herbirine sahiptir teorem. Ancak bu özelliklerin ne derece genellenebilecekleri ve de ne derece yeterli oldukları tartışmalıdır.

Şimdi yine tarihi çok eskilere dayanan ve ilk defa Öklid tarafından kanıtlandığı kabul edilen bir teoremi bu kez de biz kanıtlayalım. Bu teorem asal sayıların sayısının sonsuz olduğunu söylüyor. (Kendisi ve 1 dışında pozitif böleni olmayan sayılara asal sayı denir) Örneğin, 2,3,5,7,11,13...sayıları asal sayılardır. Elimizde asal sayılar için genel bir formül yok ya da asal sayılar kümesinde herhangi bir düzen bilmiyoruz (bugün bile). Kanıtı yapmadan önce bu dizinin nereye kadar uzadığını da bilmiyoruz. Asal sayılar kümesi bir anlamda pozitif tamsayılar kümesinin iskeletidir çünkü asallar dışındaki tüm sayılar asal sayıların çarpımından oluşur. Örneğin 210=2x3x5x7 ya da 48=2x2x2x2x3 şeklinde asal çarpanlarına ayrılırlar.

Şimdi amacımız asal sayılar kümesinin sonsuz tane elemanı olduğunu kanıtlamak. Bir önceki kanıtta kullandığımız yöntemi burada da kullanalım, yani başlangıçta bu kümenin sonlu sayıda elemanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda asal sayılar kümesi (A),

A= {2,3,5,7,...,p}

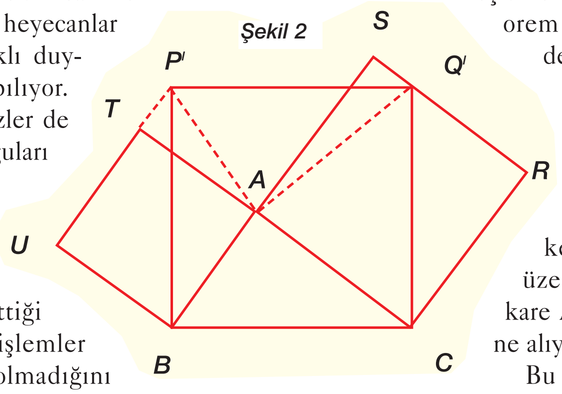
şeklinde gösterilebilir. Burada p en büyük asal sayıdır. Şimdi Q=(2x3x...xp)+1 sayısını ele alalım. Bu sayı 2,3,5,...,p asal sayılarının herbirine bölündüğünde 1 kalanını verir, dolayısıyla hiçbirine tam bölünmez. Oysa Q sayısı asal değilse en az bir asal sayı ile bölünebilmelidir. Bu durumda Q asal sayıdır. Ancak Q sayısı p'den büyüktür ve bu da p'nin en büyük asal sayı olmasıyla çelişir. Demek ki başlangıçta yaptığınız 'asal sayılar sonludur' varsayımı yanlıştır, yani sonsuz tane asal sayı vardır. Q.E.D.

Bu teorem de yukardaki teoremin sahip olduğu özelliklere sahip. Bunlara ek olarak sonsuzluk fikrini içermesi bu teoremi 'güzel' kılan bir diğer özellik. Matematikte buna benzer oldukça fazla teorem var ancak asal sayıların sonsuzluğu teoremi son derece temel oluşu ve kolay anlaşılır olması nedeniyle özellikle dikkat çekicidir.

Sayılar kuramından son derece estetik iki kanıtın üzerine şimdi de biraz geometrinin tadına bakalım. Geometri diğer matematik dallarına nazaran daha somut bir alandır. Geometrik kanıtlar da en az diğerleri kadar güzeldir. Burada vereceğimiz teorem Pisagor'a atfedilen ancak Pisagor'dan daha önceleri Çinliler tarafından da bilindiği ortaya çıkan Pisagor teoremi. Teorem herhangi bir diküçgende dik kenarların karelerinin toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu iddia ediyor. Teoremin kimi birbirine benzeyen kimi de tamamen farklı birkaç kanıtını vereceğiz. Kanıtlar bir güzellik yarışmasının finalistleri gibi birbirlerinden güzeller. İnsan her kanıtta farklı heyecanlar duyuyor, farklı duygulara kapılıyor. Umarız ki sizler de benzer duyguları yaşarsınız ve matematiğin, birçoklarının iddia ettiği gibi sıkıcı işlemler topluluğu olmadığını görürsünüz.

n	S'nin Elemanları	S'nin Alt Kümeleri	S'nin Alt küme sayısı
0	-	Ø	1
1	x_1	Ø $\{x_1\}$	2
2	x_1, x_2	Ø $\{x_1\},\{x_2\},\{x_1, x_2\}$	4
3	x_1, x_2, x_3	Ø $\{x_1\},\{x_2\},\{x_1, x_2\}$, $\{x_3\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1, x_2,x_3\}$	8

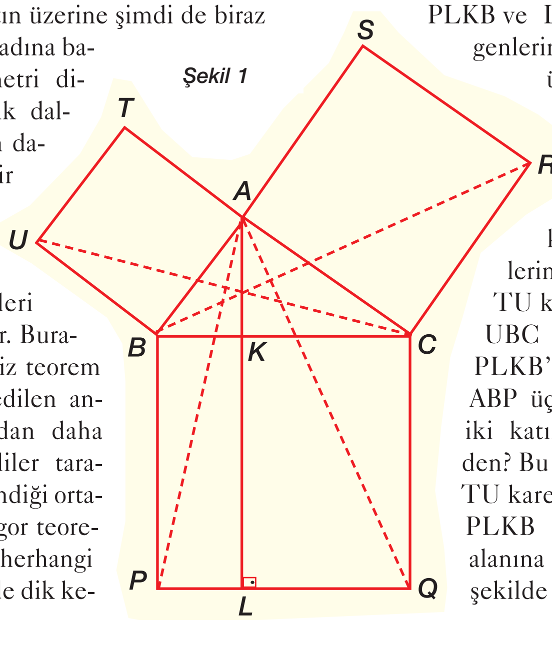
Tablo 1



Şekil 2

İlk kanıt yine Öklid'den. Bu kanıt daha sonrakilere oranla daha karışık ancak bilinen ilk kanıt olması açısından önemli. (Şekil 1)

ABC dik üçgeninde, AB ve AC kenarları üzerinde dışarıya doğru kurulan BATU ve ACRS kareleri ile BC üzerine yine dışarıya doğru kurulan PQCB karesini gözönüne alalım. A'dan BC'ye inilen AK dikmesi, PQ'yu L noktasında keserek, PQCB karesini PLKB ve LQCK dikdörtgenlerine ayırsın. UBC üçgeni ile ABP üçgeni K.A.K. (kenar-açı-kenar) ilişkisinden birbirlerine eştirler. BATU karesinin alanı UBC üçgeninin, PLKB'nin alanı da ABP üçgenini alanının iki katına eşittir. Neden? Bu durumda BATU karesinin alanı PLKB dikdörtgeninin alanına eşittir. Benzer şekilde ACRS karesinin alanının da LQCK dikdörtgeninin alanına eşit olduğu gösterilir. Bu durumda BATU ve ACRS karelerinin alanları toplamı PQCB karesinin alanına eşittir. Karelerin alanları sırasıyla AB, AC ve BC kenarlarının karelerine eşit olduğundan teorem kanıtlanmış demektir.



Şekil 1

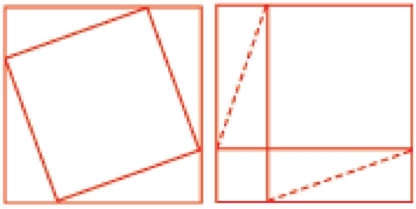
İkinci kanıt Öklid'in kanıtının teoremde çok benzeri. Bu kez BC kenarı üzerine kurulan kare A noktasını içine alıyor. (Şekil 2)

Bu kanıtın önemli noktalarından biri P' ve Q' noktaların sırasıyla UT ve RS doğruları üzerinde olduğunu görmektir. Öklid'in kanıtındaki gibi bu sefer de BATU ve ACRS karelerinin alanları sırasıyla P'BA ve Q'AC üçgenlerinin alanlarının iki katıdır ve bu üçgenlerin alanları toplamı da BCQ'P' karesinin alanının yarısıdır.

Üçüncü kanıt (Şekil 3) Hintli matematikçi Bhaskara'ya (M.S. 12. yüzyıl) ait. Oldukça sade olan bu kanıtta tek yapmanız gereken şekillere bakmak. Bu kanıt sanat ve matemetik arasındaki çizginin ne kadar ince olduğunu görebilmek için iyi bir örnek.

Bir kanıt da bizden. (Şekil 4) Bu kanıtı ülkemizin yetiştirdiği geometricilerden biri olan Hüseyin Demir, 1931 yılında henüz bir ortaokul öğrencisiyken bulmuş. Dikkat edilmesi gereken tek nokta ABCD kırık çizgisinin PQRS dikdörtgenini alanca eşit iki parçaya ayırdığı. Görüyorsunuz ki bizden de dünya çapında sanat eserleri çıkıyor.

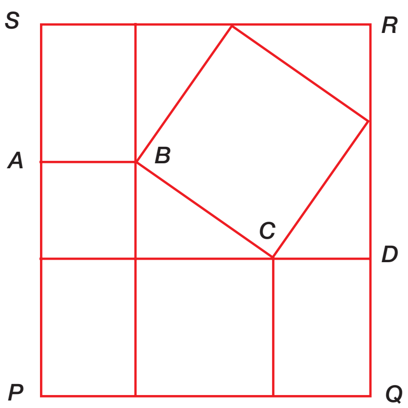
Oldukça ilginç ama Pisagor teoremini kanıtlayanlardan biri de 1881 yılında Amerika Birleşik Devletleri başkanı seçilmiş olan J. A. Garfield (Şekil 5). Acıdır ki Garfield başkan seçilme-



Şekil 3

sinden dört ay sonra bir suikaste kurban gitmiş. Kimbilir belki de politika yerine matematikle ilgilenseydi hem daha uzun bir hayat sürecekti hem de matematiğe başka katkılarda da bulunabilecekti.

Şekil 4



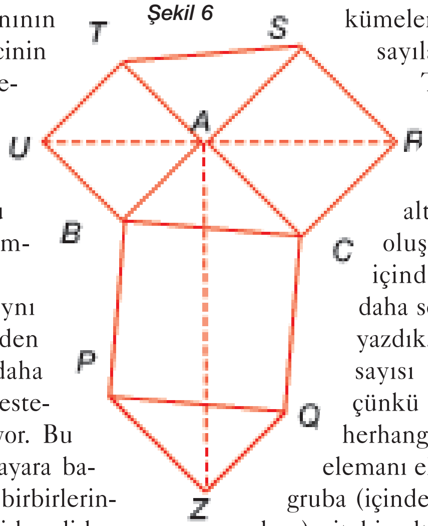
Garfield öncelikle ABC dik üçgenine eş PCQ dik üçgenini çiziyor ve şekli bir yamuğa tamamlıyor. BQPA yamuğunun alanını iki farklı şekilde hesaplayan Garfield buradan Pisagor teoreminin kanıtını elde ediyor.

|BC|=a, |CA|=b, |AB|= c olduğunu kabul edelim. BQPA dik yamuğunun alanı bir taraftan $(b+c)^2/2$ (yamuğun alanı=(alt taban+üst taban)/2 x yükseklik) olurken bir taraftan da ABC, CBQ ve PCQ üçgenlerinin alanlarının toplamı olan $(bc/2+a^2/2+bc/2)$ 'ye eşittir. Bu değerler birbirine eşitlenirse $a^2=b^2+c^2$ elde edilir.

Son kanıt diğerlerinden biraz farklı (Şekil 6). Burada temel fikir dörtgenlerin eşliği. Öklid'in kanıtında olduğu gibi AB, AC, BC kenarları üzerinde dışarıya doğru sırasıyla ABUT, ACRS, BCQP karelerini kuralım. A noktasının PQCB karesinin merkezine göre simetriği olan noktaya Z diyelim. Bu durumda ABPZ, ZQCA, TURS, UBCR dörtgenleri birbirlerine eştir. (Neden?) Buradan TUBCRS ve ABPZQC altıgenlerinin alanlarının eşit olduğu sonucu çıkar. Bu altıgenlerden ilkinin alanı AB ve AC kenarları üzerine kurulan karelerle iki adet ABC üçgeninin alanının toplamına eşittir. İkincinin alanı ise BC kenarı üzerine kurulan kare ile yine iki adet ABC üçgeninin alanının toplamına eşittir. Bu durumda kanıt tamamlanmıştır.

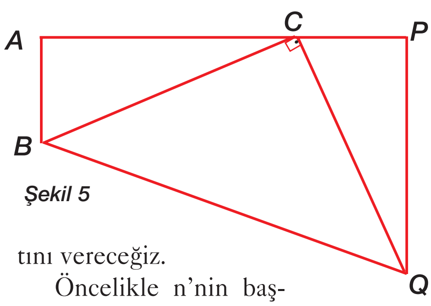
Görüldüğü gibi aynı teoremin bile birbirinden farklı, herbiri birer daha ürünü olan son derce estetik kanıtları verilebiliyor. Bu bir bakıma aynı manzayara bakan farklı ressamların birbirlerinden farklı; fakat herbiri kendi başına bir değere sahip resimler yapması gibi.

Şekil 6



Daha ilkokul sıralarında öğrendiğimiz ve sıkça kullandığmız bir teorem de kümelerin alt küme sayıları ile ilgilidir. O yıllarda bize teoremi öğreten öğretmenlerimize ve kitaplarımıza güvenip doğruluğunu kabullenmekten başka pek de yapacak birşeyimiz yoktur. Ancak gönül isterdi ki; teoremin lise öğrencileri tarafından kolaylıkla anlaşılabilecek kanıtı, en azından bu yıllarda öğretilsin ve öğrenciler gerçek matematiğin neye benzediği konusunda ufak da olsa bir fikir sahibi olabilsinler.

Teorem n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısının 2^n olduğunu söylüyor. Kanıtı bilmeyenlere zararın neresinden dönerseniz kârdır diyoruz. Bu kez de teoremin birkaç farklı kanıtını vereceğiz.



Şekil 5

Öncelikle n'nin başlangıç değerleri için birkaç inceleme yapalım. Unutmayalım ki matematikte de gözlem en az diğer bilimler kadar önemlidir. Çünkü çoğunluğun sandığı gibi matematiksel fikirler insanın kafasında öyle bir ampülün yanması gibi bir anda oluşmaz. (Tabii üzerinde çalışılan soru aşırı kolay değilse.) Öncelikle bazı denemeler, gözlemler yapılmalıdır. Şimdi ilk üç n değeri için kümenin (S diyelim) elemanlarını, alt kümelerini ve alt küme sayılarını gösteren Tablo 1'i oluşturalım.

Eğer dikkat edilirse n=3 için altkümeleri öyle oluşturduk ki önce içinde x_3 olmayanları daha sonra da x_3 olanları yazdık. Bu altkümelerin sayısı birbirine eşittir çünkü içinde x_3 olmayan herhangi bir altkümeye x_3 elemanı eklendiğinde ikinci gruba (içinde x_3 olan altkümelere) ait bir altküme elde edilir. Şimdi yapmamız gereken ikinci bir gözlemse içinde x_3 bulunmayan altkümelerle n=2 durumunda elde edilen altkümelerin aynı olduğudur. Şimdi tümevarım kullanarak teoremi kanıtlayalım. Tümevarım demek, n'nin bir başlangıç değeri için doğru olan bağıntının k pozitif tamsayısı için doğru olduğunu kabul edip k+1 için de doğru olduğunu göstermektir. Eğer her k için k+1'e geçebiliyorsak başlangıç değerinden birer birer artırarak bağıntımızın sonsuza kadar doğru olarak kalacağını göstermiş oluruz.

Bizim teoremimizde başlangıç değeri olan 0 için teoremin doğruluğu ortadadır. Şimdi k elemanlı bir kümenin 2k tane altkümesi olduğunu doğru kabul edelim. Yukarıda anlattığımız ilişkilerden dolayı, yeni eklenen bir elemanla oluşturulacak k+1 elemanlı kümenin; 2^k tanesi içinde yeni eleman bulunmayan, 2^k tanesi de içinde yeni eleman bulunanlar olmak üzere toplam $2.2^k=2^{k+1}$ tane altkümesi olur. Yani teorem n=k+1 için de doğrudur. Böylelikle her pozitif k tamsayısı için teoremin doğru olduğunu göstermiş olduk.

Yukarıdaki mantığı bu kez de indirgemeli bir dizi oluşturmak için kullanabiliriz. n elemanlı bir kümenin alt küme sayısını A_n ile gösterelim. Bu durumda $A_0=1$, $A_1= 2$, $A_2= 4$, $A_3=8$ olduğu tablodan kolaylıkla görülür. Bir önceki kanıtta doğruluğunu gösterdiğimiz ilişkiyi, şimdi tanımladığımız dizinin diline çevirirsek:

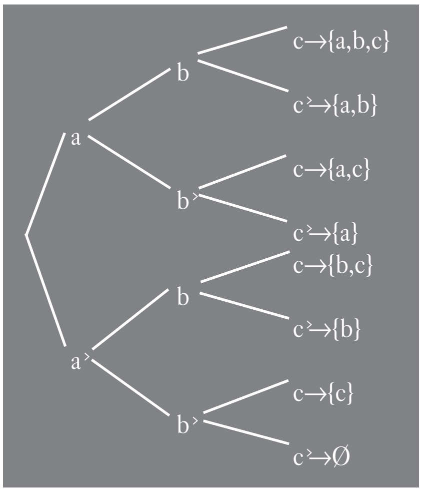
$$A_{n+1}= 2A_n$$

olur. Şimdi bu ilişkiyi 0,1,2,...,n için alt alta yazıp elde ettiğimiz eşitlikleri taraf tarafa çarparsak

$$A_1=2A_0$$
$$A_2=2A_1$$
$$A_3=2A_2$$
$$\vdots$$
$$A_{n-1}=2A_{n-2}$$
$$A_n=2A_{n-1}$$
$$\times\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$A_n=2\times 2\times\ldots\times 2\times A_0$$
$$A_n=2^n$$

elde ederiz.

Şimdi yapacağımız kanıtta kümeleri oluşturmak için birer 'ağaç'" çizeceğiz. Örneğin n=3 için çizeceğimiz ağaç aşağıdaki gibi olacak:



Burada üzerinde üs olan eleman, o kolun sonunda oluşacak altkümede o elemanın bulunmayacağını gösterir. Böylelikle ağacın her kolu farklı bir altküme oluşturur. Ağacımız üç aşama sonucunda oluşturuldu bu da kümenin eleman sayısına eşit. Ayrıca her eleman için iki olasılık olduğundan (altkümede bulunmak ya da bulunmamak) ağacımız her aşamada iki yeni kola ayrıldı. Üç aşamanın sonunda ise toplam 2x2x2=8 kol oluştu. Bunu genellersek n elemanlı bir küme için

2x2x..x2=2^n tane farklı altküme oluşacaktır.

Vereceğimiz dördüncü kanıt daha fazla bilgi gerektiriyor. Burada altkümeleri kendi aralarında eleman sayılarına göre gruplara ayırıyoruz. Örneğin n= 4 için (S={a,b,c,d} olmak üzere) gruplamayı yaparsak Tablo 2'yi elde ederiz.

Bu durumda toplam altküme sayısı:

(0 elemanlı altküme sayısı)+(1 elemanlı altküme sayısı)+(2 elemanlı altküme sayısı)+(3 elemanlı altküme sayısı)+(4 elemanlı altküme sayısı) olur. Bunu geneller ve toplam sembolü ile yazarsak:

Eleman sayısı	Altkümeler	Altküme sayısı
0	Ø	1
1	{a},{b},{c},{d}	4
2	{a,b},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{c,d}	6
3	{a,b,c},{a,b,d},{a,c,d},{b,c,d}	4
4	{a,b,c,d}	1

Tablo 2

$$\text{Altküme sayısı} = \sum_{k=0}^{n}(S\text{'nin } k \text{ elemanlı altküme sayısı})$$

elde ederiz. n elemanlı bir kümenin k elemanlı altkümelerinin sayısı $C(n,k)$ şeklinde gösterilir. Bunu yerine koyarsak:

$$\text{Altküme sayısı} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

olur. Şimdi belki herkes tarafından bilinmeyen ancak matematikte çok kullanılan bir teoremi, Binom Teoremi'ni kullanacağız:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}$$

Bu eşitliklerde $x=y=1$ alırsak;

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

buluruz. Bu da bizim göstermek istediğimiz eşitliktir.

Matematikte daha önceden bilinen, kanıtlanmış teoremleri kullanabilmek çok önemlidir. Eğer her soru çözüşte o soruda kullanacağımız tüm teoremleri baştan kanıtlasaydık bugüne kadar çözülmüş soru sayısı bir elin parmaklarını geçemezdi. Ancak önemli olan kullandığımız her teoremin doğruluğu, yani kanıtının daha önceden yapılmış olmasıdır. Bu durumda daha önceden kanıtlanmış her türlü bağıntıyı, teoremi kanıtımızda kullanabiliriz. Bununla ilgili bir fıkra bile vardır. Bir matematikçiden boş bir çaydanlık, ocak ve yeterli miktarda suyla çay verildiğinde nasıl çay demleneceğini anlatmasını istemişler. Matematikçi de başlamış anlatmaya: "önce çaydanlığa su ve çay koyarım, sonra çaydanlığı ocağa koyar, su kaynayana kadar beklerim. Su kaynayınca çayı demlerim ve su tekrar kaynadığında çay hazırdır". "Tamam" demişler, "peki içinde su dolu bir çaydanlık verseydik ne yapardın?" Matematikçi biraz düşünmüş sonra "çok kolay demiş, suyu dökerim sonra bir önceki teoremi kullanırım."

Görüldüğü gibi matematikçi için önceki bilgilerinden faydalanmak oldukça kolaylık sağlayacaktır. Bunun için her ne kadar yalınlık bir teoremin estetik olmasına katkıda bulunuyorsa da daha karmaşık durumlarda ekonomik olmak yalın olmanın önüne geçebilir. Ama sonuçta, 'zevkler, renkler ve kanıtlar tartışılmaz' (tabi ki estetik yönden).

Bu yazıda kanıtlarını verdiğimiz teoremlerin daha başka kanıtları da var. Hatta sizler de 'nasıl olsa önceden kanıtlanmış' dememeli ve kendi başınıza birer kanıt vermeye çalışmalısınız. Unutmayın ki insanın birşeyi kendinin yaratmış olması tüm estetik değerlerin ötesindedir, çünkü o sizindir. Bu teoremler için de; çok daha uzun, çok daha karmaşık da olsa sizin kendinizin vereceği kanıt sizin için daha değerli olacaktır.

Umarız bu yazı sizlerin matematiği farklı bir yönden görebilmeniz için az da olsa bir yarar sağlamıştır. Matematik, çoğunluğun düşündüğü gibi ezberlenecek formüller yığını ya da karmaşık işlemler topluluğu değildir. Matematik bir anlamda insan beyninin yaratabileceği en güzel soyut eserlerden biridir. Yani matemetik "güzel" dir. Ayrıca unutmamak gerekir ki matematiği anlayabilmek, ondan zevk alabilmek için matematikçi olmak gerekmez. Önemli olan bir matematik teoreminin içindeki mantığı kavrayabilmek ve hatta bu mantığı hissedebilmektir. Bunu hissettikten sonra göreceksiniz ki bir matematik teoreminin size verdiği zevk Beethoven'in senfonilerinden, Picasso'nun resimlerinden ya da Michelangelo'nun heykellerinden hiç de aşağı değildir.

Deniz Gündüz

Kaynaklar

Alpay, Ş.,"G. Hardy'nin Savunusu", Matematik Dünyası, Cilt 3,Sayı 2

Arf,C., "Matematiğin Şiir Yönü", Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 4

Hardy,G.H., Bir Matematikçinin Savunması, TÜBİTAK Yayınları, Ankara, 1994

King,P.J., Matematik Sanatı, TÜBİTAK Yayınları, Ankara, 1997

Larson,L.C., Problem Solving Through Problems

Özlük Ö.,Şahin A., Tezer C., "Pisagor Teoreminin Çeşitli Kanıtları", Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 3