

MATEMATİK PROBLEMLERİ VE BİLMECE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Erdoğan SAKMAN

6. BENZETME YÖNTEMİ

İki veri arasındaki ilişkinin başka iki veri arasındaki ilişkiye eşitliğinden yararlanarak bilinmeyi elde etmektir. Ya problem içindeki bir ilişkinin ya da başka bir problemdeki ilişkinin eşiti aranır.

İki büyüklük arasında ilişki kurmak birinden diğerini elde edecek (veya birinden diğerine geçmeyi sağlayacak) kural ya da kuralları bulmak demektir.

1. Bir yapı yerindeki borulardan ikisi eklenerek uzunluğu belli bir boru kadar yapılması isteniyorsa önce bir veriden diğerine geçmenin kuralı bulunmalıdır. Yani borulardan ikisi uç uca getirilmeli ya da aynı yerde bulunmalıdırlar. Problemden iki içaçı ayrı yerlerde olduklarından boru benzetmesi kullanılarak denilebilir ki içaçılar aynı yerde bulunacak biçimde bir araya getirilmelidirler: Bunun kuralı (B) açısını (C) açısı üzerine ya da (C) açısını (B) üzerine taşımaktır.

2. Birleştirilen boruların, boyu belli boru kadar olup olmadığını görmek için ya iki boru toplamı diğer boru yanına ya da boyu belli boru ekli borular yanına getirilmelidir. Açılar, borular örneğine benzetilerek ya (B+C) içaçıları toplamı (A') açısı üzerine taşınmalı ya da (A') dışaçısı (B+C) üzerine getirilmelidir.

3. (A') dışaçısının (B) içaçısı üzerine getirilmesi kararlaştırılmışsa bunun kuralı; (B) köşesinden AC kenarına paralel bir doğru çizmektir. Böylece (A') açısı (B) açısı içinde oluşur ve (B) açısı altında kalan da (C) açısı olur. Buradan $A' = B + C$ sonucu elde edilir.

İlki geçen sayımızda yer alan iki bölümden oluşan bu yazı ile, matematik problemleri, bilmece ve hatta yaşam sorunlarının çözümleriyle ilgili akıl yürütmeleri, amaca yöneltmekte yardımcı olacak yöntemler sunmaya çalıştık.

7. KARŞITLIK YÖNTEMİ

1. "Bir üçgende iki içaçının toplamı bunlara komşu olmayan dışaçıya eşittir," cümlesi bir önerme kabul edilip bunun karşıtı yazılır. Karşıtı; "Bir üçgende iki içaçının toplamı bunlara komşu olmayan dışaçıya eşit değildir," yani $A' \neq B + C$.

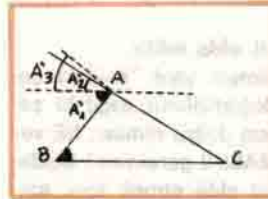
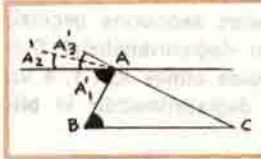
2. $A' \neq B + C$ ise ya (A') açısı (B) ve (C) açılarının toplamından büyük ($A' > B + C$) veya küçüktür ($A' < B + C$). Başka bir deyişle, $A' = B + C$ olsaydı (B + C) açısı (A') açısı ile çakışırdı. Eğer $A' > B + C$ ise (B + C) açısı (A') açısı içinde kalacak ve eğer $A' < B + C$ ise (B + C) açısı (A') açısının dışarı taşacaktır.

3. ($A' = B + C$) olduğunu göstermek için $A' > B + C$ ve $A' < B + C$ durumlarının problemin verilerine uymadığı ispatlanmalıdır.

4. $A' > B + C$ ise, (B) ve (C) açıları, A köşesinden BC tabanına paralel çizilerek (A') açısı üzerine taşındığında $A'_1 = B$ ve $A'_2 = C$ olmalıdır.

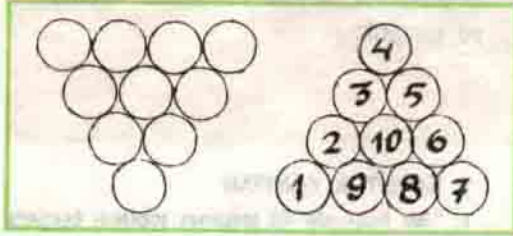
Çünkü $A' > B + C$ kabul edilmiştir. Halbuki A'_3 C'dir; çünkü çizilen doğru BC tabanına paralel ve A'_3 açısının diğer kolu da AC kenarıdır. O halde, $C = A'_2$ değil $C = A'_3$ olmalıdır. Diğer yönden, $A'_1 = B$ 'dir ve $A' = A'_1 + A'_3$ olduğundan $A' = B + C$ sonucuna ulaşılır.

5. $A' < B + C$ ise, aynı düşüncelerle (B) ve (C) açıları (A') dışaçısı üzerine taşındığında $A'_1 = B$ olduğundan $A'_1 = C$ bulunur; çünkü $A' > B + C$ kabul edilmiştir.



Halbuki $A_3 = C$ 'dir; çünkü çizilen doğru BC tabanına paralel ve A_3 açısının diğer kolu AC kenarındır. O halde, $A_2 = C$ değil $A_3 = C$ olmalıdır. Ayrıca, $A_1 = B$ ve $A' = A_1 + A_2$ gerçeği göz önünde bulundurularak $A' = B + C$ sonucu elde edilir.

BİLMECE. Şekil 3'deki soldaki toplardan yalnız üçünün yerleri değiştirilerek sağdaki şekil nasıl elde edilebilir?



1. TANIMSAL YÖNTEM

1. "Yalnız üç topun yeri değiştirilecek," ne demektir? Soldaki şekilde on top bulunduğuna göre, bunlar yerlerinden alınıp başka yere konulacak ve üç topun dışında kalan yedi topa dokunulmayacak demektir.

2. Yedi topa dokunulmadan ve üç topun yerleri değiştirilerek sağdaki şeklin elde edilmesi ne demektir? Dokunulmayan yedi topun oluşturduğu biçimin, sağdaki şeklin içinde de bulunması demektir.

3. Soldaki şekildeki hangi sayılı yedi topun birbirlerine göre diziliş biçimi sağdaki şeklin içinde de vardır? 2, 3, 5, 6, 8, 9 ile 10 sayılı topların birbirlerine göre diziliş biçimi hem soldaki hem sağdaki şekilde vardır.

4. O halde, soldakinden sağdakine geçmek için hangi üç topun yeri değiştirilmelidir? Soldaki şekilden sağdakini elde etmek için 1, 4 ve 7 sayılı topların yerleri değiştirilmelidir ki bilmece çözülmüş olsun.

2. ÇÖZÜMDEN GERİLEMEK YÖNTEMİ

1. Soldaki şekilden öyle üç top alınıp, öyle yeni üç yere konulacak ki, sağdaki şekil elde edilsin.

2. Bilmecenin öncülleri ve hükmü nedir? Öncül 1. Verilen on toptan oluşan şekil soldaki ise,

Öncül 2. soldaki şekilde yalnız üç topun yerleri değiştirilirse,

Hüküm. Sağdaki şekil elde edilir.

3. Hükmün doğru olması yani "soldaki şekilde üç topun yerleri değiştirilirse sağdaki şekil elde edilir," sonuncunun doğru olması, NE veya NELERİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? Soldaki şekilden, sağdaki şekil elde etmek için, sol-

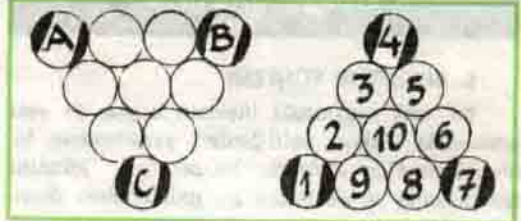
daki şekildeki toplardan üçünün yerlerini değiştirmek gerekir.

4. Yalnız üç topun yerlerini değiştirmek NEYİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? Yedi topa dokunulmayacağı gerektirir.

5. "Yedi topa dokunulmadan sağdaki şekil elde edildi," hükmünün doğruluğu NE veya NELERİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? Yedi topun soldaki ve sağdaki şeklin içindeki diziliş biçimlerinin aynı olmasını gerektirir.

6. Yedi topun soldaki ve sağdaki şekilde aynı dizilişte bulunması NEYİN DOĞRU OLMASINI gerektirir? Soldaki ve sağdaki şekillerin içinde aynı dizilişteki yedi topu bulunmasını gerektirir.

7. Soldaki şekildeki hangi yedi top, sağdaki şekilde vardır? Soldaki şekilde 2, 3, 5, 6, 8, 9 ve 10 sayılı topların diziliş biçimi, sağdaki şeklin içinde de vardır.



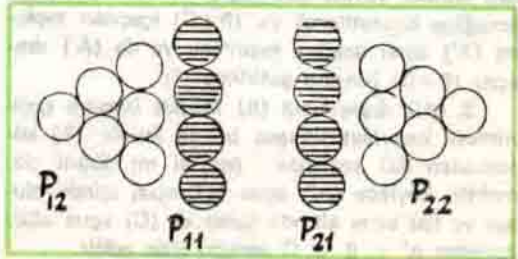
8. Soldaki şekilden, sağdaki şekle geçmek için soldaki şekildeki topların hangileri nereye konulmalıdır? Soldaki şekilde 1, 4 ve 7 topları sırayla sağdaki şekildeki A, B ve C işaretli yerlere konulmalıdır.

3. EŞİTİNİ BULMAK YÖNTEMİ

1. Eşitini bulmak, bir veriye eşit olan başka bir (bilinen veya bilinmeyen) problem parçasını bulmaktır. Bir verinin eşiti ya doğrudan doğruya ya da veri uygun bir yere aktarılarak bulunur.

2. Burada problemin tamamı ne yalnız soldaki ne de sağdaki şekildir. Her iki şekil birlikte problemi tanımlamaktadırlar.

3. Madem üç topun yerleri değiştirilerek şekillerden birinden diğeri elde edilecektir o halde, şekillerde eşit olan top dizilişleri vardır.

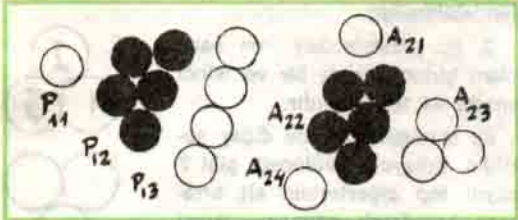


Soldaki P_{11} parçası, sağdaki şekilde A_{21} parçasına eşit; fakat P_{12} ve P_{22} parçaları eşit değildir; çünkü azalan sayıda top dizilişleri farklı yöndedirler.

$P_{11} = P_{21}$ dir; fakat bu eşit biçim kullanırsa şekillerden birinden diğerine geçmek için altı topun yerlerini değiştirmek gerekir.

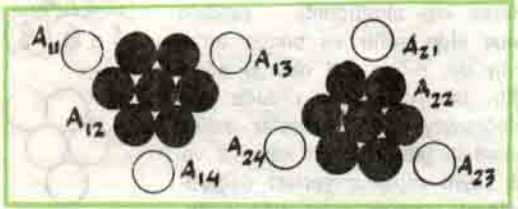
4. Eşit dizilişlerden bir diğeri de $P_{12} = P_{22}$ dir;

Fakat P_{12} esas alındığında bir şekilden di-



ğerine geçmek için beş topun yerlerini değiştirmek zorunludur.

5. O halde içlerinde yedi top olan eşit parçalar aranmalıdır ki yalnız üç topun yerleri değiştirilerek şekillerden birinden diğerine geçilebilsin.

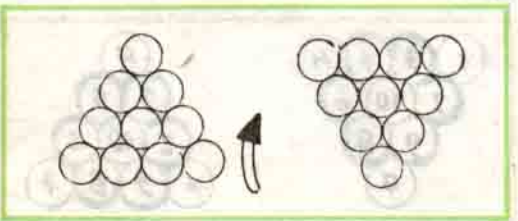


Şekillerin incelenmesinden görülür ki $A_{12} : A_{22}$ dir ve yalnız üç topun yerleri değiştirilerek soldaki şekilden, sağdaki şekil elde edilebilmektedir.

4. YARDIMCI(LAR) YÖNTEMİ

1. Yardımcı veya yardımcılar, problemin verileri ve/veya koşulları olarak verilmeyen eklemelerdir.

2. Soldaki şekil bir kağıt parçası üzerine düzgüncü çizilir. Sonra ters çevrilip (tabandaki dört top yukarıda olacak biçimde) ikinci bir kağıt parçasına kopya edilir. Böylece sağdaki şekil elde edilmiş olur.



Burada kullanılan kağıt parçaları problemde hiç söz edilmeyen yardımcılarıdır.

3. Birinin üst kısmında bir ve diğerinin dört top olacak biçimde kağıt parçaları üst üste getirilir.

4. İki kağıttaki toplamın olabildiği kadar çoğunun çakışmaları sağlanır. Bu işlem, soldaki ve sağdaki şekilde biçimi değişmeyen dizilişi gösterecektir.



5. Böylece soldaki şekildeki üç topun nelerle yer değiştireceği görülerek, bilmece çözümlür.

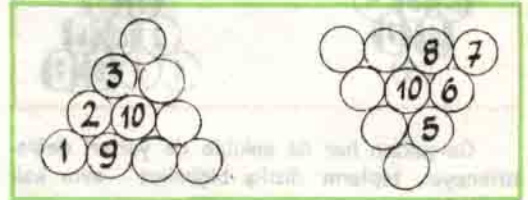
5. DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

1. Değiştirmek problemin veya bilmeceenin bir verisinin veya koşulunun büyüklüğünün değiştirilmesi anlamındadır.

2. Bu bilimcede koşul yalnız üç topun yerlerinin değiştirilerek bir şekilden diğerine geçmesidir. Problemi çözmek için bu koşul değiştirilebilir.

2. Değiştirilecek top sayısının sonsuz olması (kısıtlanmaması) bilimceyi hemen çözer. Değiştirilecek top sayısının sıfır olması bilimceyi kesinlikle çözmez.

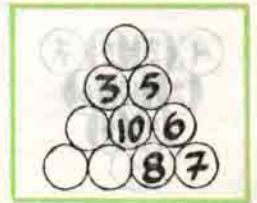
3. O halde, özel durumlar incelenmelidir. Bu durumlardan biri yerleri değiştirilecek top sayısını, örneğin, beş almaktır. Hangi beş topun yerleri değiştirilmelidir ki sağdaki şekil elde edilmiş olsun?



Bu yeni bilmece çeşitli biçimlerde çözülebilir. Top 1, 2, 3, 9 ve 10 dışında kalanlar veya Top 5, 6, 7, 8 ve 10 dışında kalanlar değiştirilerek çözüm elde edilebilir.

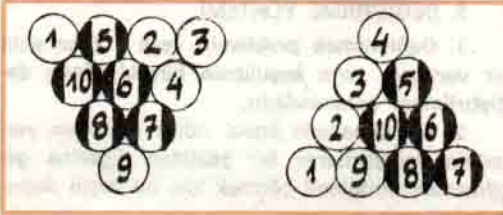
4. Beş top değiştirilerek verilen şekilden istenen şeklin kolayca elde edilmesi, aynı sonucun 4 topun değiştirilerek alınabileceği fikrini vermektedir.

Top 3, 5, 6, 7, 8 ve 10 dışında kalanlar değiştirilerek verilen şekilden istenen şekle geçilebilir :



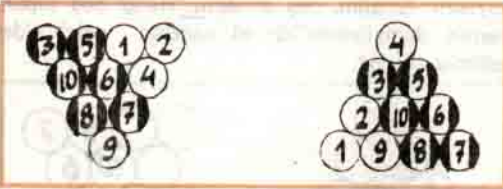


5. Özel haller olan beş ve dört topun değiştirilmesinde çözüm elde edildiğine göre bu çözümlerde değişmeyen neden yararlanılmıştır ki üç top durumuna da uygulanıp sonuç alınabilir? Bunun için değiştirilmeyen topların soldaki ve sağdaki şekillerdeki ilişkileri aranmalıdır.



Her iki şekilde de değiştirilmeyen toplar tarandığında, oluşturdukları dizilişin, tamamen benzer oldukları görülmektedir.

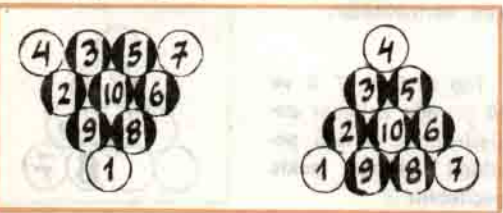
6. Bu bulgu doğru ise özel hal olarak alınan 4 topun yerlerini değiştirme işleminde de aynı ilişki bulunmalıdır.



Gerçekten her iki şekilde de yerleri değiştirilmeyen topların diziliş biçimleri aynı kalmaktadır.

7. O halde, top sayıları değiştirildiği halde değişmeyen bu ilişki, üç top durumunda da uygulandığında çözüm elde edilebilmelidir.

Böyle bir çözüm için arama yapıldığında 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 sayılı topların birbirlerine göre diziliş biçimlerinin soldaki ve sağdaki şekilde değişmediği görülmektedir.



Böylece 1, 4 ve 7 sayılı topların yerleri değiştirilerek, soldaki şekilden, sağdaki şekle geçilebilmekte ve bilmece de çözülmüş olmaktadır.

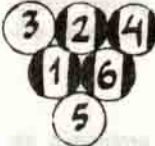
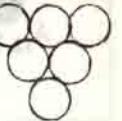
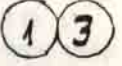
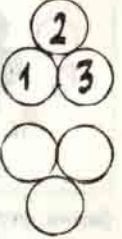
6. BENZETME YÖNTEMİ

1. Benzetmek ilişki eşitliğini bulmaktır. İlişki eşitliğini bulmak için çeşitli sayıda topolarla düzenlenen (birinci sırada bir, ikinci sırada iki, vb..) şekillerden biri ile bunun tersi olan diğeri arasındaki ilişki üç top hali için de kullanılabilir.

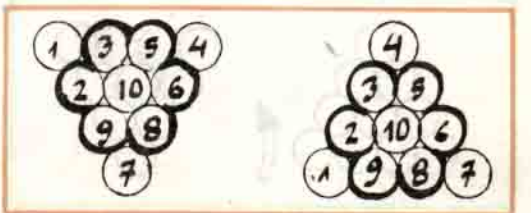
2. Bu dizilişlerden en sade olanı birinci sırada bir ve ikinci sırada iki top olanıdır.

Bu dizilişin tersi de diğer şekildedir. Kolayca görüleceği gibi 2 sayılı top diğerlerinin alt ortasına konularak istenen ikinci şekil elde edilebilir. İki şekil arasındaki ilişki, şekillerde benzer olan yandaki dizilişteki topların yerlerinin değişmemesidir.

3. Top sayısı "birinci sıra bir, ikinci sıra iki top," kuralına uyularak altı alındığında, yandaki dizi elde edilir ve bunun tersinin de, diğer dizi olduğu görülür. İlk incelemede olduğu gibi değişmeyen dörtlü toplar dizisi, yandaki gibidir. Geri kalan 3 ve 5 sayılı topların yerleri değiştirilerek istenen şekil elde edilebilir :



benzer olduğu görülür ve 1, 4 ve 7 sayılı topların yerleri değiştirilerek sağdaki şekil elde edilir :



GEÇEN BÖLÜMDEKİ MANTIK BİLMECELERİNİN YANITLARI :

KİM NE İŞ YAPIYOR?

Galip'in sözü doğru olamaz çünkü geri kalan Erol ve Galip'ten biri (yani telefoncu veya kapıcı) doğru söylemiş olur ki bu verilere aykırıdır. O halde, Erol, kâtip olmalıdır. Kâtip doğru söylediğine göre Galip telefoncu ve Faruk kapıcıdır ki her ikisi de yalan söylemektedirler. Yani hem "Erol kapıcıdır", hem "Faruk kâtipdir", sözleri yanlıştır. Bu açıklamalara göre sonuç aşağıdaki gibidir :

Erol Kâtip Faruk Kapıcı Galip Telefoncu

KİM NEREDE OTURUYOR?

Yuvarlak bir masada, A,B,C,D, ve E alfabadeki sıraları izlenmeden ancak aşağıdaki gibi oturtulabilirler :

A (katip)

(Telefoncu) C
(Şoför) E

D (Kapıcı)
B (Temizlikçi)

- 1) Ali, Cahit'in solundadır.
- 2) Bekir, kapıcı ile şoför arasında olduğundan Davut kapıcı ise, Erol, şofördür.
- 3) Ali, temizlikçi olmadığına göre kâtipdir çünkü kapıcı ile telefoncu yan yana değildir; yani Cahit, telefoncudur.
- 4) Geri kalan Bekir de temizlikçidir.

KİM NE YAPTI?

Pencere, Ali, Cahit ve Davut varken kırılıyor yani Bekir pencereyi kırıyor.

Saat de Ali, Cahit ve Davut varken bozuluyor yani Bekir saati bozmuş olamaz.

Kalemler, Ali, Bekir ve Cahit varken kayboluyor yani Davut'a suç yüklenemez.

O halde, kalemleri Bekir almış olmalıdır. Böylece, Davut'un saati bozduğu ve Cahit'in pencerenin camını kırduğu anlaşılır.

SINAV ÖNCELİĞİ

Davut ve Cahit, Sıra 2, 4 veya 6 dadırlar. Ali, Sıra 1, 3, 5 tedir ve Sıra 7 de değildir. Bekir, Sıra 1, 3 veya 5 dedir. Bekir Sıra 1 de ise, Davut Sıra 2 de olabilir. Ali hem tek sayılı sırada hem Sıra 7 değildir. Ali, Sıra 5 de olabilir. Böylece, Faruk Ali'den bir önde olur. Cahit'e çift sıra olan 6 kalır. Buna göre Galip, Sıra 3 dedir. Sonuç, aşağıdaki gibidir :

Birinci	: Bekir	Dördüncü	: Faruk
İkinci	: Davut	Beşinci	: Ali
Üçüncü	: Galip	Altıncı	: Cahit
		Yedinci	: Erol

KİM KAÇINCI?

Bekir, Ali'den dört önde olduğuna göre sıra; B — — — A, biçimindedir. O halde, Cahit, Erol ve Davut arada kalan yerlerdedirler. Erol'un yeri tek sayılı olduğundan durum; B — E — A, gibidir. Davut da Cahit'ten iki geride olduğuna göre sonuç aşağıdaki gibidir :

Bekir birinci	Erol üçüncü
Cahit ikinci	Davut dördüncü
		Ali beşinci

7. KARŞITLIK YÖNTEMİ

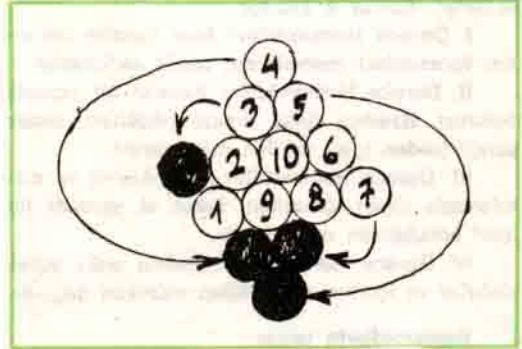
1. "Soldaki şeklin toplarından yalnız üçünün yerleri değiştirilerek sağdaki şekil elde edilir," hükmünün karşıtı: Soldaki şeklin toplarından yalnız üçünün yerleri değiştirilerek sağdaki şekil elde edilemez," dir.

2. "... yalnız üçünün yerleri ... elde edilemez," ü toptan daha çoğunun (4, 5, 6 vb.) yerleri değiştirilmelidir, anlamındadır; çünkü 10 topun yerleri değiştirildiğinde sağdaki şeklin elde edileceği kesindir.

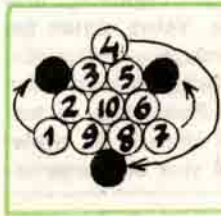
3. Dört topun yerleri değiştirildiğinde soldaki şekilden, sağdaki şekle geçilebileceği kolayca görülür;

4. Dört topun yerleri değiştirilerek çözüm elde edildiğine göre, bundan sonra amaç; bu dört toptan birine dokunmadan, verilen şekilden istenene nasıl geçileceğini aramak olmalıdır.

5. Bunun için öyle toplara yer değiştirilmelidir ki, dört toplu taban yukarıda oluşsun ve aynı hareketle aşağıda da iki toplu sıra belirsin. Bunu sağlamanın yolu Top 3 ve 5'i hareket



ettirmek değil bunların bulunduğu sıraya Top ve 7'yi getirmektir.



6. Bundan sonra Top 1'in, Top 8 ve Top 9 alt ortasına getirilerek çözüme ulaşılabileceği kolayca görülür. Burada kullanılan önemli ilke; "yapılan bir hareketin en az iki işe yaramasıdır."