MATEMATİK OLİMPİYATLARI

SORULARIN ÇÖZÜMÜ

Prof.Dr. Okay ÇELEBİ*

1. Aynı düzlemde bulunan ve merkezleri aynı olan R ve r (R > r) yarıçaplı iki çember veriliyor. P küçük çember üzerinde sabit bir nokta ve B büyük çember üzerinde değişken bir nokta olsun. BP doğrusu büyük çemberi C noktasında kesiyor. BP'ye P noktasında dik olan l doğrusu küçük çemberi A noktasında kesiyor. (Eğer l, P noktasında çembere teğet ise A = P dir.)

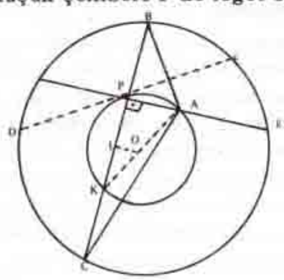
(I) $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2$ ifadesinin aldığı değerlerin cümlesini bulunuz.

(II) AB'nin orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

CEVAP

1) Bronz madalya alan Alper Halbutoğulları'nın yarışmada verdiği çözüm

(I) $\overline{DE}$ küçük çembere P de teğet olsun.



$\overline{BP}.\overline{PC} = \overline{PD}.\overline{PE} = \overline{PD}^2 = R^2 - r^2$ [1]

$\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + 2\overline{BP}.\overline{PC} + \overline{PC}^2$ [2]

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + 2\overline{PA}^2$ [3]

$\overline{PA}^2 = \overline{AK}^2 - \overline{PK}^2$

$= \overline{AK}^2 - \overline{PC}^2 - \overline{BP}^2 + 2\overline{PC}.\overline{BP}$ [4]

[2], [3] ve [4] den

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AK}^2 + 6\overline{BP}.\overline{PC}$ [5]

ve [1] den

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 6R^2 + 2r^2 =$ sabit

bulunur.

(II) M ve N sırasıyla AB ve PO nun orta noktaları olsun. $\widehat{POM}$ de kenarortay teoremine göre

$2\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OM}^2 - 1/2\ \overline{OP}^2$

veya

$8\overline{MN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BK}^2 - 2\overline{OP}^2$ [6]

ve dolayısıyla

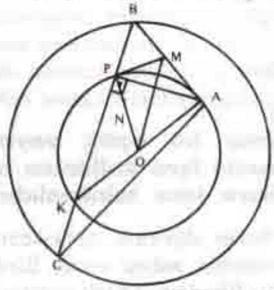
$8\overline{MN}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 - 2r^2$

yazılabilir. [4] denkleminden bulunan

$\overline{PA}^2 = 2R^2 + 2r^2 - \overline{PC}^2 - \overline{BP}^2$ değeri [6] da yerine yazılırsa

$8\overline{MN}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + (2R^2 + 2r^2 - \overline{PC}^2 - \overline{BP}^2) - 2r^2$

ve $\overline{MN} = R/2$ bulunur. Dolayısıyla M noktası N merkezli R/2 yarıçaplı çember üzerindedir.



Not: Bu soru takım elemanlarından Ozan Hafızoğulları tarafından da tam olarak çözülmüştür.

2. n bir pozitif tam sayı ve $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ bir B cümlesinin alt cümleleri olsun.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

(a) her bir A_i'nin tam 2n tane elemanı vardır.

(b) her bir $A_i \angle A_j$ $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ yalnızca bir tek eleman içerir.

(c) B'nin her bir elemanı en az iki tane A_i'de vardır.

B'nin her bir elemanını 0 veya 1 ile göstermek istiyoruz. Böyle bir gösterilimin, A_i'lerin her birinin tam n tane 0 içerecek şekilde yapılabilmesi için n'nin değeri ne olmalıdır.

CEVAP

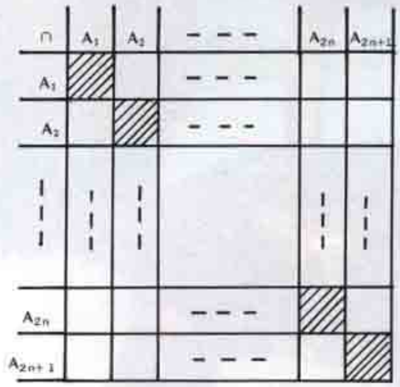
2) Bronz madalya alan Deniz YURET'in yarışmada verdiği çözüm:

Problemde verilen (c) koşulundan, her elemanın en az bir $A_i \cap A_j$ de olması gerektiği çıkıyor. O halde herhangi bir A_i altkümesinin, öteki altkümelerin hiçbirinde bulunmayan bir eleman içermesi mümkün değildir. O halde A_i kümesindeki 2n elemandan herbiri her A_j için $A_i \cap A_j$ de bulunmalıdır.

Problemin (b) koşuluna göre, verilen altküme grubunda A_i dışında 2n tane küme vardır. A_i nin bu 2n kümenin her biri ile kesişimleri yalnız bir eleman içerir. A_i, 2n elemanlı olduğundan herhangi farklı iki alt kümeyle kesişimlerinin aynı olmayacağını şöyle ispat-

* *Olimpiyat Ekip Başkanı, A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi.*

layabiliriz: A_i, A_j, A_k kümelerini ele alalım. $A_i \cap A_j = A_i \cap A_k = \{a\}$ olsun. $A_i \setminus \{a\}$ $2n-1$ elemanlıdır. Fakat A_i, A_j, A_k dışında kalan kümelerin sayısı $2n-2$ dir (c) koşuluna göre $2n-1$ elemanın herbiri, diğer kümelerin en az birinde bulunmalıdır. Dolayısıyla en az bir kümede bu elemanlardan iki tane bulunur ki bu da (b) koşuluyla çelişir.



Tüm kümelerin kesişimini yandaki tabloda gösterelim. Her kümenin kendisi dışında $2n$ kümeye kesişimi olduğundan her eleman her satırda ve her sütunda bir kez görülmelidir. Kesişim işlemi değişmeli olduğundan tablo esas köşegene göre simetriktir. Bu tabloda B nin her elemanı 2 kez görünmek zorundadır. Dolayısıyla bu tabloda esas köşegenin üstünde kalan parçasında B nin elemanları birer kez geçer. Demek ki B cümlesinin eleman sayısı $n(2n+1)$ dir. Şimdi n nin tek ve çift olması hallerini ayrı ayrı irdeleyeceğiz.

(I) n tek olsun:

Bu halde B nin tek sayıda elemanı vardır. Dolayısıyla tabloda 0 ve 1 lerin sayısı eşit olamaz. Her A_i eşit sayıda 0 ve 1 içerseydi tablodaki 0 ve 1 lerin sayısı eşit olurdu. Bu halde toplam 0 ve 1 lerin sayısının da eşit olması gerekirdi. Bu ise B nin tek sayıda elemanının olması gerçeği ile çelişir. Yani n tek olursa problemde istenen şekilde bir gösterim bulunamaz.

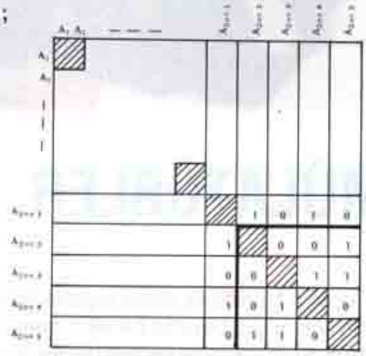
(II) n çift olsun:

Bu halde problemde istenen gösterimin yapılabileceğini tüme varımla göstereceğiz.

(i) $n = 2$ için B nin eleman sayısı 10 dur. 5 tane 0 ve 5 tane 1 vardır. $A_i \cap A_j$ lerin tablosu şekilde görüldüğü gibi kodlanırsa verilen şart sağlanmış olur.

$\cap$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		1	1	0	0
A_2	1		0	1	0
A_3	1	0		0	1
A_4	0	1	0		1
A_5	0	0	1	1	

(ii) $n \geq 2$ ve n çift sayı olsun. Tablonun verilen koşullar sağlanacak şekilde düzenlendiğini varsayalım. Tabloya 4 yeni altküme ve her alt kümeye de 4 yeni eleman eklenecektir. Önceki kümelerin kesişimlerini $(A_i \cap A_j \mid i, j \leq 2n-1)$ olduğu gibi bırakalım; Yeni eklenen kümeleri eskileriyle kesiştirirken örneğin;



$A_i \cap A_j = \{1\}$, $i + j$ tek ise

$A_i \cap A_j = \{0\}$, $i + j$ çift ise

$1 \leq i \leq 2n + 1,\ 2n + 2 \leq j \leq 2n + 5$

şeklinde kodlama yapalım. Her satıra ve her sütuna eşit sayıda 0 ve 1 eklenmiş olacaktır. Şimdi

$2n + 2 \leq i, j \leq 2n +$ için $A_i \cap A_j$

lerin tablosunu yaparak çözümü sonuçlandırabiliriz. A_{2n+2}, A_{2n+3}, A_{2n+4} ve A_{2n+5} kümelerinin ilk $2n+1$ küme ile kesişimleri daha önce belirlenmişti. Bunların tek indisli olanlarında $n+1$ tane 0 ve n tane 1; çift indisli olanlarında ise n tane 0 ve $n+1$ tane 1 vardı. Şimdi de bu dört kümenin kendi aralarındaki kesişimini tablonun sağ alt köşesindeki parça ile tanımlayalım. Böylece kümede eşit sayıda 0 ve 1 bulunur.

Diğer Soruların Çözümünü gelecek sayımızda izleyebilirsiniz.