122 Yıllık Üçgen-Kare Dönüşüm Bulmacasının Çözümünün Doğruluğu Kanıtlandı

İlay Çelik Sezer [*TÜBİTAK Bilim ve Teknik Dergisi*

Matematikte çoğu zaman sadece bir problemin ne anlama geldiğini anlamak için bile epey matematik bilgisi gerekir. Buna karşılık bazı matematik problemleri de herkesin anlayabileceği kadar basit ve yalındır. Ancak kolayca anlaşılmaları, kolayca çözülebilecekleri anlamına gelmez. Tıpkı tam 122 yıl çözülmeyi beklemiş olan "Dudeney diseksiyon problemi" gibi… Gelin anlaşılması çok kolay olan bu problemin 1902'de İngiltere'deki bir gazetenin bulmaca köşesinde başlayan hikâyesini birlikte keşfedelim…

"Şekilleri parçalara ayırıp yeni şekiller oluşturma problemi, insanlar hayvan derilerinden giysiler üretmeye başladığından beri var olan bir problem. Bu tür problemler kâğıt, kumaş gibi ince malzemelerin kullanıldığı başka pek çok alanda da karşımıza çıkıyor. Yaptığımız ispat, bu tür diseksiyon problemlerinin anlaşılmasına ve çözümüne yönelik yeni ufuklar açıyor." diyor Uehara.

Bugün Japonya İleri Bilim ve Teknoloji Enstitüsünde (JAIST) öğretim üyesi olan Tonan Kamata, on yıl kadar önce bir matematik müzesindeki origami benzeri bir sergi ünitesi karşısında adeta büyülenmişti. Sergi ünitesinde dört parçaya bölünmüş üçgen bir plaka vardı. Parçalar birbirine uç uca minik menteşelerle tutturulmuş hâldeydi. Parçalar menteşeler yardımıyla basitçe döndürüldüğünde üçgen bir kareye dönüşüyordu.

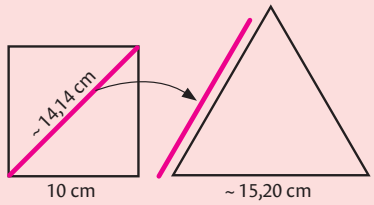
Sergi ünitesinin esin kaynağı ise 1902 yılında İngiltere'deki bir gazetede yayımlanan bir matematik bulmacasıydı. Kendi kendini yetiştirmiş bir matematik meraklısı olan ve aynı zamanda bir gazetede bulmaca köşesi hazırlayan Henry Dudeney, okurlarına şu soruyu sormuştu: Bir eşkenar üçgeni, parçaların arka yüzleri çevrilmeksizin yerleri değiştirilerek bir kare oluşturacak şekilde en az kaç parçaya ve nasıl bölersiniz? Dudeney iki hafta sonra yayımlanan köşesinde, Manchester'dan Mr. C. W. McElroy adlı, Dudeney'e sık sık bulmaca çözümleri gönderen bir memurun dört parçalı bir çözüm bulduğunu yazdı. İki hafta daha geçtikten sonra Dudeney, okurlara McElroy'un çözümünden daha iyi, yani daha az parça içeren bir çözüm gelmediğini duyurdu. Bu rekor o zamandan beri korundu. Ancak kısa bir süre öncesine kadar daha az parça içeren bir çözüm olup olmadığı da kanıtlanamadı.

Japonya İleri Bilim ve Teknoloji Enstitüsü öğretim üyeleri Prof. Dr. Ryuhei Uehara ve Dr. Tonan Kamata ile Massachusetts Teknoloji Enstitüsünden (MIT) Prof. Dr. Erik Demaine, işte bu soruya yanıt bularak çığır açıcı bir başarıya imza attı. Üçlü, Dudeney'nin 122 yıl önce yayımladığı orijinal çözümün gerçekten de optimal çözüm olduğunu kanıtladı. Araştırmacılar, çalışmayı 5 Aralık 2024 tarihinde erişimi herkese açık olan arXiv adlı akademik paylaşım platformunda yayımladı ve geçtiğimiz ocak ayında yapılan 23. Japonya Kuramsal Bilgisayar Bilimi Çalıştayı'nda (LA/EATSCS) sundu. Araştırmacılar çalışma kapsamında şu temel teoremi kanıtladı: Aynı alana sahip bir eşkenar üçgen ile bir kare, parçalar arka yüzlerine çevrilmemek kaydıyla üç ve daha sayıda ortak parçaya bölünerek birbirine dönüştürülemez. Başka bir deyişle parçaları ters çevirmeden tekrar birleştirerek bir kare oluşturabilmek için eşkenar üçgeni en az dört parçaya bölmek gerekir. Dudeney'nin orijinal çözümünde de parçaların arka yüzüne çevrilmeme şartı geçerliydi.

Diseksiyon problemi olarak isimlendirilen bu tür problemlerle ilgili başlıca zorluk, bir çokgeni parçalayarak bir başka çokgene dönüştürürken ilk çokgeni mümkün olan en az sayıdaki parçaya ayırma şartıdır. Diseksiyon problemlerinden bazıları, matematikçileri ve

bulmaca meraklılarını yüzyıllarca uğraştırmıştır. Dudeney'nin bulmacası da en ünlü diseksiyon problemlerinden biri olarak günümüze kadar geldi. Diseksiyon problemleri sadece matematikçilerin ilgi alanına girmekle kalmaz; tekstil, mühendislik ve endüstriyel üretim gibi alanlarda da uygulama bulur. Kamata bir süredir Uehara ve Demaine ile ortak çalışmaları kapsamında origami katlama problemlerinin çözümü için çizge kuramını kullandıkları yeni bir yaklaşım geliştirmeye çalışıyordu. Çizge kuramı, nesneler arasındaki ikili ilişkileri çizge adı verilen matematiksel yapılar kullanarak inceler. Çizgeler, düğüm adı verilen noktalar ve bu noktaları birleştiren çizgiler yani kenarlar ile görselleştirilen matematiksel yapılardır. İki yapı arasındaki ilişkileri derinlemesine incelemek amacıyla bir çizgenin kenarları ve düğümleri ile bir başka çizgenin kenarları ve düğümleri arasında karşılaştırmalar yapılabilir. İşte Kamata bu yaklaşımın Dudeney'nin diseksiyon probleminin çözümünde işe yarayabileceğini düşündü.

Dudeney diseksiyon probleminin çözümünün bir kısmı oldukça basit sayılır. İki parçalı çözüm olasılığı, problemin kısıtları düşünüldüğünde elenir. Şöyle ki üçgen ve karenin eşit alana sahip olması gerekir çünkü aynı parçalardan oluşmalıdır. Aynı parçalardan oluştukları için de iki parçalı bir çözümde bu parçaların kenarlarından bazılarının üçgenin ve karenin kenarlarını oluşturması gerekir. Bir kareden kesilebilecek en uzun kenar ise karenin köşegenidir. Gerek çizimle gerek kâğıtları kesip biçerek gerekse de hesaplamayla görülebilir ki karenin bölümlenmesiyle elde edilebilecek en uzun kenar olan köşegenin uzunluğu, o kareyle aynı alana sahip (neden aynı alana sahip olmaları gerektiğini az önce belirttik) bir eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğundan küçüktür. Bu da iki parçalı bir çözümün imkânsız olduğunu kanıtlar. Bu ispatın mantığını yukarıdaki çizim ve hesaplarımızda da görebilirsiniz.



Karenin Alanı = Üçgenin Alanı

İki parçalı bir çözüm mümkün olsa, kareden kesilecek iki parçadan en az birinin en az bir kenarının üçgenin bir kenarını oluşturması gerekir. Karenin iki parçaya bölünmesiyle oluşturulabilecek en uzun kenar ise karenin köşegenidir. Örneğin kenar uzunluğu 10 cm olan bir kareyle eşit alana sahip (aynı parçalardan oluşacaklar ise eşit alana sahip olmak zorundalar) bir eşkenar üçgenin kenar uzunluğu yaklaşık 15,20 cm'dir. Ancak kenar uzunluğu 10 cm olan karenin iki parçaya bölünmesiyle elde edilebilecek en uzun kenar olan köşegenin uzunluğu yaklaşık 14,14 cm'dir. Bu da eşit alana sahip eşkenar üçgenin bir kenarını oluşturmak için yeterli değildir. Yukarıdaki çizimde de görsel olarak açıkladığımız bu durum, iki parçalı çözümün mümkün olmadığını kanıtlar.

Üç parçalı bir çözümün var olmadığını kanıtlamak ise çok daha meşakkatli oldu. Nitekim problemin çözümünü yüzyıldan uzun süre geciktiren de bu kısımdı.

Dudeney diseksiyon probleminin dört parçalı çözümü

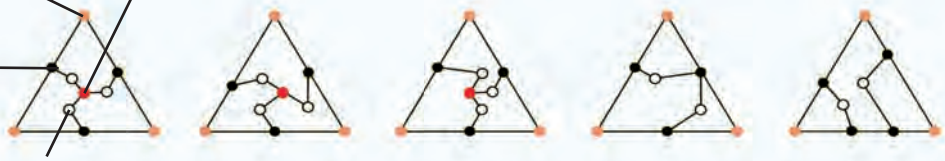
Dudeney'nin Diseksiyon Problemi İçin Üç Parçalı Bir Çözüm Arayışı

Aşağıdaki şemalar, eşkenar üçgenler ve kareler için üç parçalı bölümleme seçeneklerini gösteriyor. Farklı türdeki köşe noktaları, her iki geometrik şekil üzerindeki kesim yerlerinin ve açıların karşılaştırılmasına imkân tanıyor. İçi boş halkalar, çizgeler karşılaştırıldıktan sonra düğüm noktalarında kenarların birleşme açılarındaki "oynamayı" yani esneklik alanlarını takip etmeye yarıyor. Kesim noktalarındaki bu esneklik alanı ispatın tamamlanması için bir dizi *lemmayı* (teoreme giden ara adımları) gerekli kıldı.

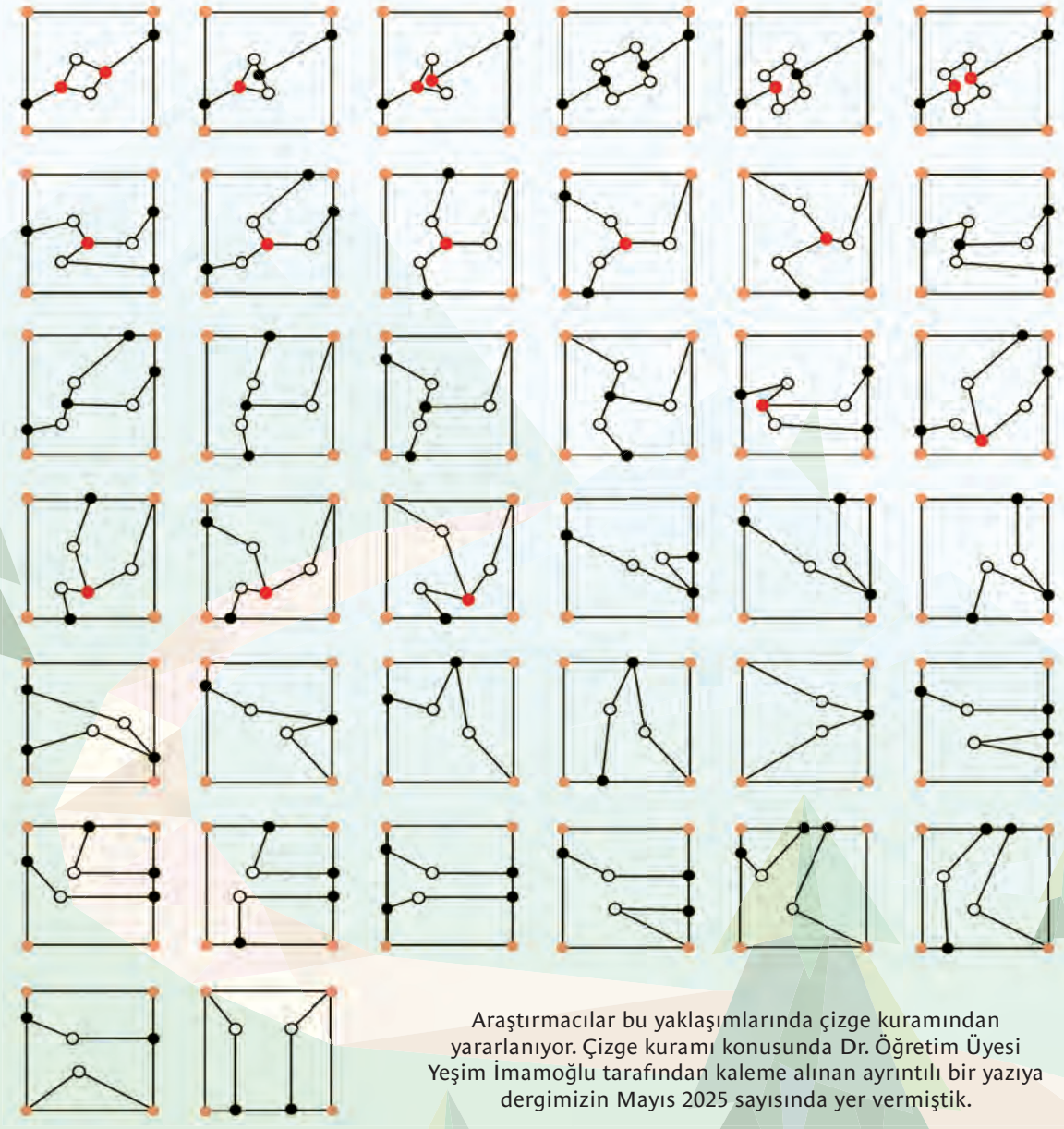
Turuncu noktalar: Düğümleri belirtir.

Kırmızı noktalar: Üç kenarın kesiştiği noktaları belirtir.

Siyah noktalar: İki kenarın birleştiği ve iç açıların toplamının 180 derece olduğu noktaları belirtir.



İçi boş halkalar (beyaz daireler): İki kenarın birleştiği ve iç açıların toplamının 360 derece olduğu noktaları belirtir.



Araştırmacılar bu yaklaşımlarında çizge kuramından yararlanıyor. Çizge kuramı konusunda Dr. Öğretim Üyesi Yeşim İmamoğlu tarafından kaleme alınan ayrıntılı bir yazıya dergimizin Mayıs 2025 sayısında yer vermiştik.

Demaine, her ne kadar sadece üç parçalı bir yapboza karşılık gelse de bir üçgeni üç parçaya bölmenin sonsuz sayıda yolu olduğunu söylüyor. "Bu parçalardan her biri herhangi sayıda kenara sahip olabilir ve kesimler, şekil üzerindeki herhangi konumdan başlayabilir. Ortada sürekli değişebilen parametreler var ve bu da sonsuz sayıda olasılığı beraberinde getiriyor. İşte bu yüzden bu problem can sıkıcı derecede zor. Bunu bilgisayar yardımıyla tüm olasılıkları tek tek deneyerek çözemezsiniz." diyor Demaine.

Araştırmacılar, bu problemin üstesinden gelmek için eşkenar bir üçgenin mümkün olan bölümlenme biçimlerini, kesimlerin üçgenin kenarlarıyla nasıl çakıştığına dayalı olarak kategorize etti. Araştırmacılar önce üçgeni bölümlemenin sonsuz sayıdaki yolunu 5 kategori altında topladı. Sonra da aynı işlemi bir kare için yaptılar ve 38 farklı kategori tespit ettiler.

Daha sonra araştırmacılar, kesim çizgileri çizgenin kenarlarını, kesimlerin birleşim noktaları ise çizgenin düğümlerini oluşturacak şekilde bu kategorilerin her birini bir çizge ile temsil etti. Bu sayede parçaların nerede birleştikleri, kenarların uzunlukları ve birleşme açıları karşılaştırılabilir hâle geldi. Bu kategoriler arasında eşleşmeler bulmak amacıyla bir tür "diyagram eşleştirme" yöntemi uygulandı. Araştırmacılar üçgenin her bir çizgesini karenin her bir çizgesiyle karşılaştırdı. Bunu, her bir şekildeki mümkün olan tüm kesim çizgisi rotalarını izleyip bu rotalardaki kenar uzunluğu ve açı örüntülerini karşılaştırmak suretiyle yaptılar. Eğer karenin çizgelerinden birinin çizgi rotalarındaki örüntüsü, üçgenin çizgelerindekinden biriyle uyuşsaydı bu, araştırmacıların üç parçalı bir çözüm keşfettikleri anlamına gelecekti.

Bu yaklaşımın sonsuz bir olasılıklar havuzu biçiminde süreklilik arz eden bir problemi görece daha somut ve incelenebilir bir hâle getirdiği söylenebilir. Öte yandan Demaine her bir kategori içinde tüm bu düğümlerin yer alabileceği hâlâ sonsuz sayıda konum bulunduğunu hatırlatıyor. Bu da çizge karşılaştırmalarının üç parçalı çözümün mümkün olmadığını kanıtlamaları için tek başına yeterli olmadığı anlamına geliyordu. Bu yüzden de araştırmacılar kanıtı tamamlayabilmek için bir dizi karmaşık *lemma* yani teoreme giden ara adımlar önerdi. Bu lemmalar, üçgen ve kare bölümlemelerinde kullanılan kategorileri temsil eden çizgelerin hiçbiri arasında eşleşme olmadığını ortaya çıkardı. Sonuçta, araştırmacılar çelişkiyle ispat (bir önermeyi, tersinin mantıksal bir çelişkiye sebep olduğunu göstererek ispatlamak) yönteminden yararlanarak üç parçalı çözümün mümkün olmadığını kanıtladı.

Pek çok diseksiyon problemi için belirli sayıda parça içeren çözümler bulunsa da en az parçayı içeren çözüm optimal yani geçerli şartlardaki en iyi çözüm sayılıyor. Bu çalışmada geliştirilen teknik ile ilk defa bu tür bir problem için belirli bir çözümün optimal çözüm olduğu kanıtlandı. Uehara, "Geliştirdiğimiz teknik, kesip yeniden düzenleyerek birleştirme biçimindeki gerçek hayat problemleri için de optimal bir bölümleme bulmanın mümkün olduğunu gösteriyor. Bu teknik geliştirilerek bölümleme problemleri için tamamen yeni keşiflerin de önünü açabilir." diyor. Özellikle de araştırmacılar ispatlarını sadeleştirebilirlerse geliştirdikleri "diyagram eşleştirme" yönteminin çözüm bekleyen origami katlama problemlerine benzer birçok problemin çözülmesine yardımcı olabileceği düşünülüyor. ■

Kaynaklar

https://www.scientificamerican.com/article/mathematicians-find-proof-to-122-year-old-triangle-to-square-puzzle/
https://www.jaist.ac.jp/english/whatsnew/press/2025/03/11-1.html