



Çerçi

Şahin Koçak

Üçgenin İç Açıları Toplamı Üçgenden Üçgene Değişir

Bu hikâyeyi her dinleyişimde tüylerim diken diken oldu. Gûya geçen yüzyıl sonlarında bir mühendishane mektebinin açılışında Avrupa'dan bazı alimler gelmiş de, neden icabediyorsa bizim müderrisleri imtihan etmek istemişler de, bu amaçla üçgenin iç açıları toplamı kaç derecedir diye sormuşlar da, bizimkiler de "üçgenden üçgene değişir" diye cevap vermişler. Bu işin neresine kızacağımı bilemiyorum. Hadi diğer taraflarına kızmak işim ya da haddim olmayabilir ama, bizim müderrisler ne deselerdi ki? Rüşdiye talebesi gibi yüzseksen derece diyecek halleri yoktu herhalde. Yazgıları kendilerini böyle bir zillete taraf kılmış ve bir cevaba mecbur bırakmışsa, belki olsa olsa "hangi üçgenin?" diyebilirlerdi. Bakalım o zaman ne olacaktı? Suali soranlar bu karşı sual üzerine cevaba muktedir olacaklar mıydı? Ama bizim çelebi müderrislerimiz herhalde misafirlerini müşkül mevkiinde bırakmak istememiş olmalılar.

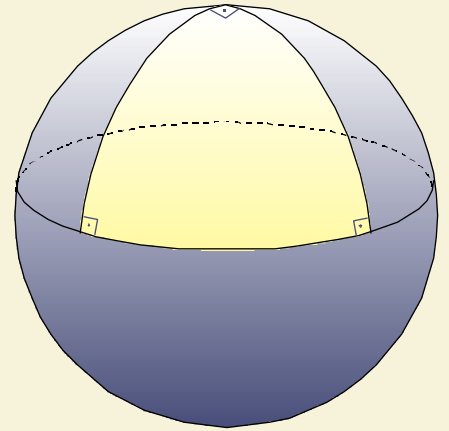
Şimdi hal böyleyken, hâlâ bazı büyük entellektüellerimiz bu hikâyeyi uluorta anlatabiliyorlar. Daha geçen sene önemli bir ödül töreninde kalabalık bir misafir kitlesinin ve devlet ricalinin huzurunda aynı hikâye anlatıldı. Salondan esef ve alay kokan gülüşmeler yükseldi.

Sanki biz onların torunları değilmişiz gibi. Tabîî torunlar dedelerine gülebiliyorlarsa aslında epey yol alınmış demektir. Belki zamanla babalarına, nihayet de kendilerine gülecek noktaya ulaşabilirler. (Burada sakın alaycı olduğum falan sanılmasın; bunun en yüksek mertebeye olduğunu beş yaşındaki yeğenimin bile kavradığını farketmişim akşam bayağı umutlanmıştım.)

O toplantıda yüzlerce kişinin içinde dedelerimizi savunmaya kalkmanın ne kadar akıllıca olacağını tartmaya çalışırken, zaten konu değişti ve şimdi hatırlayamadığım başka bir anekdota geçildi. Bu arada, konuşmalar sürerken sığağı sığağına gerçek tartışmaların yapılamadığı, ancak lâf atma şeklindeki tartışmaların yapılabildiği, resmî tartışmaların ise ancak konuşmalar bittikten sonra hâlâ hazır bulunan zevatla düşük bir tansiyonda ve bant kaydı gibi notlara bakılarak yapılabildiği toplantı düzenlerinden nefret ettiğimi de belirtmek isterim.

Şimdiye kadar kendimi hâlâ açıkça ifade edemediysem, şu anda ifade etmiş olayım ki, elbette bir üçgenin iç açıları toplamı üçgenden üçgene değişir. Bunu 2000 sene önce Menelaus biliyordu, 1500 sene önce Hintliler biliyordu, 1200 sene

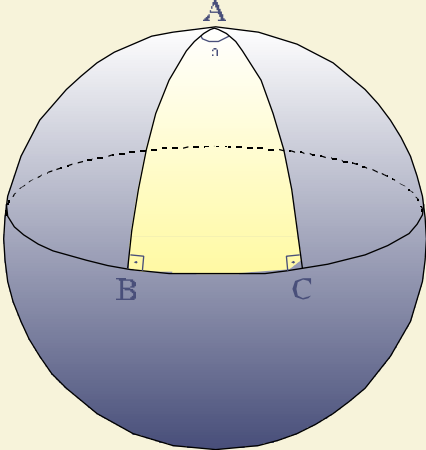
önce Araplar biliyordu, 400 sene önce Harriot ve Girard nefis formlere döktüler; daha yakına gelmiyorum, çünkü kayıtların sonu yok! Yani bizimkilerin de bilmesinden daha tabîî bir şey olabilir mi? Olan biteni 300 sene geriden bile takibetmiş olsalar, gene bilmemeleri mümkün değil. Eğer biz de lisede böyle bir şey görmedik diyorsanız bilemem. Ben talim-terbiye programları hakkında fikir yürütmeye kalkışacak kadar da aptal değilim ama, işte size hemen bir örnek verebilirim.



Şekil 1

Bir an için evrenimizin bir küre yüzeyinden ibaret olduğunu düşünelim ve Şekil 1'de gördüğümüz üçgeni gözönüne alalım. Bu üçgenin iç

açıları toplamı 270° 'dir. Bu üçgenin kenarları, sanırım şekilden anlaşıldığı üzere, ekvator ve meridyen yaylarından oluşmaktadır ve meridyenler arasındaki açı 90° olarak alınmış olup (6 saatlik bir zaman farkı), bu suretle üçgenin her üç açısı da dik açı olmaktadır.



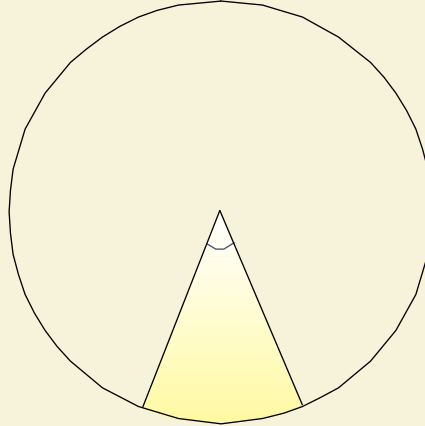
Şekil 2

İsterseniz örneği birazcık geliştirelim ve Şekil 2'deki üçgeni gözönüne alalım. Bu defa A köşesindeki meridyen yayları arasındaki açı a derece olsun. Bu takdirde iç açılarının toplamı

$$90 + 90 + a = 180 + a \text{ derece olur.}$$

Aslında derece ile açı ölçümü son derece sun'i bir şeydir. Bunun Sümerlere uzanan akıllı astronomik gözlemlere dayandığını kabul etmekle birlikte, şunu da unutmamak gerekir ki, bir yıl 360 gün değildir ve dahi öyle olsa idi, her gezegen için öyle değildir ve bu sebeple bir tam açının 360 dereceye bölünmesi arzî ve arızîdir. Nitekim bunu 400'e bölen de vardır, 12'ye bölen de vardır ve siz derseniz kötü sayılara bile bölebilirsiniz.

Daha doğal bir açı ölçümü, yay uzunluğunu kullanmak suretiyle yapılabilir. Şekil 3'de yarıçapı 1 birim olan bir dairenin iki yarıçapı ile oluşturulan ve şekilde minik bir yay konularak tercih edilmiş olan açıyı gözönüne alalım. Bu açının büyüklüğünü karşısındaki yayın uzunluğu ile ölçmek kadar tabii bir şey var mıdır? Buna açının "radyan" olarak ölçüsü denir. Bu durumda tam açının



Şekil 3

ölçüsü, çemberin çevresi olan 2π radyan olur. Başka bir örnek olarak,

dik açının ölçüsü $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radyan olur.

(İnşallah bir gün meselesini de konuşuruz). Küçük bir alıştırma olarak, bir açı a derece olarak verilmişse, bunun radyan karşılığı

$$\alpha = \frac{a}{360} \cdot 2\pi \text{ olur.}$$

Şimdi Şekil 2'deki üçgenimize dönelim ve küremizin yarıçapının 1 birim olduğunu kabul edelim. Acaba bu üçgenin alanı nedir? Küre yüzeyinin tamamının alanının 4 birim² olduğunu herhalde biliyorsunuz. (Yoksa bunu da bir gün konuşabiliriz.) O halde kuzey yarıkürenin alanı 2 olur. (birim, birim² falan deyip durmayacağım). Herhalde şurası açıktır ki, üçgenin alanının, kuzey yarıkürenin alanına oranı, a derecenin 360 dereceye oranı kadardır.

$$\text{Yani, üçgenin alanı} = \frac{a}{360} \cdot 2\pi$$

Bu ifadeye herhalde şaşırmışsınızdır: Bu değer, yukarıda işaret ettiğimiz gibi, açımızın radyan olarak ölçüsü olan α 'dan başka bir şey değil!

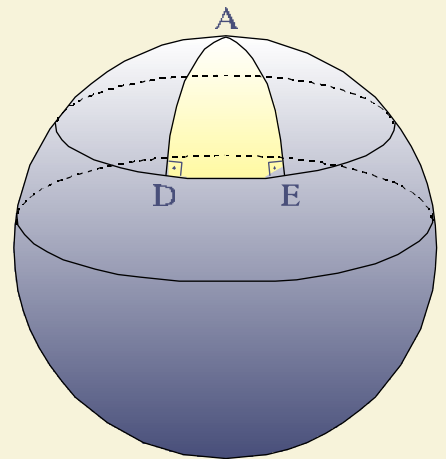
$$\text{Üçgenin alanı} =$$

180° 'nin radyan karşılığının olduğunu düşünürseniz, buna göre, radyan cinsinden

$$\text{üçgenin iç açıları toplamı} = + \\ = + \text{ üçgenin alanı}$$

formülünü elde ediyoruz. Bundan şık bir şey olabilir mi? Üçgenin iç açıları toplamı üçgenden üçgene değişiyor ve pek güzel değişiyor: Üçgenin alanı artınca toplam artıyor, azalınca azalıyor! Açılar toplamı 180° 'den (180°den) fazla ve tam üçgenin alanı kadar fazla. Bu ilişkiyi özel bir üçgen için görmüş olsak da, meraklılar tarafından genel olarak da görülebilir. Bu özelliğin hoş bir sonucu olarak şunu hemen söyleyebiliriz ki, üçgen ne kadar küçük olursa, açıları toplamı da 180° 'ye o kadar yaklaşmaktadır. Yani kendi çapımızda küçük üçgenlerle uğraşsak fazla bir sorun olmayacağı düşünülebilir; lâkin mızımız matematikçileri buna 78inandıramazsınız. Ellerine bir iletke bile aldıklarını daha görmüş değilim ama, açıları toplamı kâğıt üzerinde 180 dereceden trilyonda bir bile farklı çıksa, onlar için Öklid ölmüş ve yeni âlemler açılmıştır. Bu esrarlı âlemlere yaklaşmışken içeriye bir göz atmak iyi olurdu ama, bunu gelecek aya bırakmak ve bugünlük sizinle yukarıdaki özelliği ilk öğrendiğimde duyduğum şaşkınlık geçtikten sonra yaşadığım bir sıkıntıyı paylaşmak istiyorum:

Yukarıdaki özelliği tahkik için Şekil 4'deki üçgeni düşündüm: Meridyenler aynı meridyen kalsın, üçgenin tabanı ekvator üzerinde değil, bir kuzey enlem üzerinde olsun.



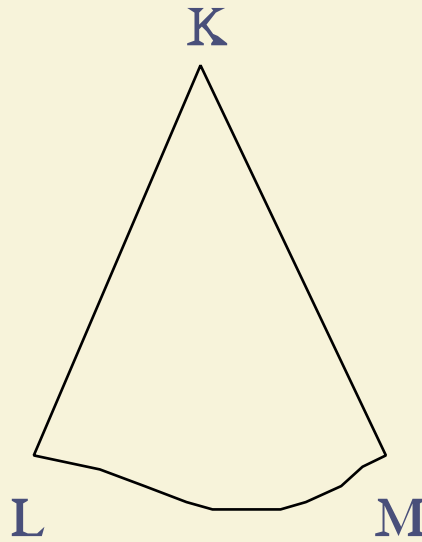
Şekil 4

Bu durumda açıları değişmedi, fakat alan küçüldü. Öyleyse üçgenin iç açıları = + üçgenin alanı formülü doğru olamaz! Sanıyor insan. Ya formül doğru



değil, ya üçgen üçgen değil! Üçgen nedir allahaşkına? Yaşadığımız evrende bize üç nokta verilirse, diyelim ki bu üçgen oldu. Ama kenarsız üçgen birşeye benzemez. Kenarlar nedir? Bu noktaları birleştiren en kısa yollar desek? (Birden fazla yol olabilmesi durumuyla şimdilik kafamızı karıştırmayalım.) Peki evrenimiz bir küre yüzeyiyse, D ve E noktalarını birleştiren enlem parçası en kısa yol mudur? Herhalde değil! Bu ikisinden geçen bir büyük çember üzerinden daha kısa bir yol bulabiliriz. (Haritada Selçuk ile Başkale arasındaki yollara bir bakar mısınız?). Demek ki ADE bir üçgen değil. Nitekim bildiğimiz düzlemde de yandaki KLM bir üçgen değildir.

Şimdi belki diyeceksiniz ki şekil 2'deki ABC de bir üçgen değildi. Sanki tünelcisiniz de A ile B'yi kürenin içinden birleştireceksiniz! Nereye birleştiriyorsunuz? Evrenimiz küre yüzeyinden ibaretse, onun içinde



boşluk falan yok, geçecek yer yok, daha kısa yol yok! Adam gibi küre yüzeyi üzerinde kalarak gitmemiz lâzım. Hem içi dolu bile olsaydı, yani evrenimiz dolu küre olsaydı ve tüneli açsaydınız, o tünel düz mü olacaktı? Bunun garantisi nerde?

Haydi tüneli bırakalım, gerçek evrenimize de dönelim, iki noktayı da birleştirelim, isterseniz de ışıkla birleştirelim, bunun düz olacağını kim söylüyor? Öklid değil, kim söylerse söylesin; her ne kadar yukarıda onların biraz günahlarını aldıysam da, ben görmedim ama, Gauss adındaki önyargısız büyük bir matematikçi 19. yüzyıl başlarında eline bir iletke almış ve Almanya'da Göttingen-Braunschweig havalisindeki üç tepenin oluşturduğu üçgenin iç açıları toplamını resmen ölçerek bulmaya çalışmış. Herhalde tepeler birbirine yakın olduğu için olacak, açılar toplamında 180° 'den net bir sapma bulamamış. Ama 20. yüzyılda üç tepe yerine, Dünya, Güneş ve bir yıldızdan oluşan üçgenin bir kenarının nasıl büküldüğünü duymayan kalmadı. Ama o kenar eğik değil düzdü. Olabileceği en düz durumdaydı. En düz, düz değil mi? Düz ne demek?

